



SKALI

3B

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Skali 3B

Nemendabók

ISBN 978-9979-0-2097-4

© Gyldendal Norsk Forlag AS 2015

Heiti á frummálinu: Maximum 10 Grunnbok (seinni hluti)

Kápuhönnun: 07 Gruppen AS / Kristine Steen

Mynd á kápu: Shutterstock.com/Daniel Harwardt

Teikningar: Børre Holth

Ritstjóri norsku útgáfunnar: Greta Sandrød Owesen

© 2015 Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Bjørnar Alseth

© 2016 íslensk þýðing og staðfærsla: Kristín Bjarnadóttir

© 2016 ljósmyndir:

Myndir frá shutterstock.com

Myndir af nemendum: Konstantin Yolshin; Antonio Guillem; Shooting Star Studio; vita khorzhevskia; Rawpixel.com; Victor Torres; Gelpi JM; g-stockstudio; alexandre zveiger; Nolte Lourens; Samuel Borges Photography; Max Topchii; Photomaxx; pathdoc; East; violetblue; Billion Photos; vita khorzhevskia; alexandre zveiger; Aðrar myndir: bls. 10 Andrey Yurlov; bls. 13 Pressmaster; bls. 15 EpicStockMedia; bls. 16 Monkey Business Images; bls. 17 kyrien; bls. 18 Liz Kcer; bls. 21 Joshua Rainey Photography; bls. 23 Mink Walaiporn; bls. 24 Maridav; bls. 25 Jiripravda; bls. 26 Marxon; bls. 27 Miao Liao; bls. 29 TunedIn by Westend61; bls. 31 Shining starf; bls. 34 Martina Ebel; bls. 35 exopixel; bls. 36 fotohunter; bls. 37 Alena Ozerova; bls. 42 boka; bls. 44 letr; bls. 46 Pressmaster; bls. 48-49 Clari Massimiliano; bls. 53 Beth Swanson; bls. 53 Peter Zijlstra; bls. 53 deZmarco; bls. 54 Orange Line Media; bls. 56 Brian A Jackson; bls. 57 LeventeGyori; bls. 59 Rita Kochmarjova; bls. 63 a.o. arosoft; bls. 63 a.n. Grete Sandrød Owesen; bls. 64 yevgeniy11; bls. 65 dotshock; bls. 66 Marynchenko Oleksandr; bls. 69 davorana; bls. 69 Peter Gudella; bls. 70 t.v. Nikita Rogul; bls. 70 t.h. Planner; bls. 71 Dmitri Ma; bls. 75 Robert Hoetink; bls. 76 a.o. AlexLMX; bls. 76 a.n. Nikita Rogul; bls. 77 Tinxi; bls. 78 Artem Shadrin; bls. 79 ABB Photo; bls. 81 Laurent Renault

Aðrir

bls. 6-7 gettyimages.com, Flashpop

bls. 12 mbl.is/Kristján Kristjánsson

bls. 61 istock.com, naphtalina

Leturgerð í meginmáli: Neo Sans Std, 10,5/14 pt.

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Auður Bára Ólafsdóttir

Öll réttindi áskilin

1. útgáfa 2016

Menntamálastofnun

Kópavogi

Umbrot: Menntamálastofnun

Prentvinnsla: Prenttækni ehf. - umhverfissvottuð prentsmiðja

Málfarslestur: Ingólfur Steinsson



SKALI

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Formáli

Verið velkomin í *Skala 3B*.

Nú byrjar stærðfræðin að verða virkilega spennandi, krefjandi og gagnleg.

- Stærðfræði er nytsamleg í daglegu lífi, bæði í námi og í atvinnulífi.
- Í stærðfræði eru einnig gagnleg mynstur og kerfi, í henni eru röksamleg tengsl og hún hefur sitt eigið táknbundna tungumál.
- Stærðfræðinám getur útheimt mikla vinnu en það felur líka í sér gleði, undrun og sigra!
- Í stærðfræðitímum vinnur þú með öðrum, leysir dæmi og vandamál, vinnur hagnýt verkefni, spilar spil, rökræðir um lausnir og hugsanaferli og notar tölvu.

Hér sérðu hvernig nemendabók getur verið til hjálpar:

Markmið
kafans.

Lán og sparnaður

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út vexti af innlánum
- reikna út fjölda vaxtadaga
- reikna með vaxtavótum
- gera útreikninga sem varða neyslu
- gera útreikninga sem varða notkun greiðslukorts
- skilja muninn á mismunandi tegundum lána
- gera útreikninga varðandi lán með jöfnum afborgunum

Bankar eru stofnanir sem byggja starfsemi sína meðal annars á að fólk leggi sparipeningana sína í banka og að lána fólk peninga. Til þess að bankinn hagnist á þessari starfsemi tekur hann hærri vexti af peningunum sem hann lánar út en hann greiðir í vexti af peningunum sem fólk leggur inn.

Innlánsvextir eru vextirnir sem við fáum af peningum sem við leggjum inn í banka.

Útlánsvextir eru vextirnir sem við greiðum af peningum sem við fáum að láni í banka.

Útlánsvextir eru hærri en innlánsvextir.

Seðlabanki Íslands tekur á móti innlánum og lánað íslenskum börnum peninga. Seðlabankinn er þannig „banki bankanna“. Hann hefur einnig einkarétt á því að gefa út seðla og myntir.

Á Íslandi eru (árið 2016) einkum tvenns konar bankar:

- Viðskiptabankar – þeir eru í eigu hlutfélaga en ríkið á meirihluta í flestum þeim.
- Sparisjóðir eru fáir (árið 2016). Þeir eru flestir í eigu einkaaðila en ríkið á stóran hluta í einum þeim.

1.35 Ert þú sammála þessu unga fólki?

Til að geta sparað þarf ég að hafa yfir miklum peningum að ræða.

A



Þú sem ég get aðeins lagt fyrir lánað sparnaði borgar það sig ekki.

B



Hvað finnst þér um unga fólk og sparnað?

C



Ég hagnast mest á því að leggja fyrir í sjóðum.

D



Öruggast er að spara með því að leggja inn á sparireisningu.

Verkefni til umræðu.

Skýringarmyndir sem hjálpa þér að skilja.

Talblöðrur með útskýringum og ábendingum.

Texti til
útskýringar.

Sýnidæmi sem
útskýra fyrir þér
hvernig þú
getur reiknað
og skrifað.

Regla Pýþagórasar

Í verkefni 4 á blaðsönnu á undan komu í ljós tengsl sem minn eru til stærðfræðingsins og heimspekingins Pýþagórasar sem var upp um það bil 550 f.kr. Þessi tengsl kallast *Pýþagórasregla* og hún er notuð þegar lengdir tveggja hliða í réthyrndum þríhyrningi eru þekktar og reikna áæt lengd þriðju hliðarinnar.



Regla Pýþagórasar

Í réthyrndum þríhyrningi eru summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur og flatarmáli ferningsins út frá langhlið.

$$\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$$

Reglan gildir einnig í hina áttina. Ef summa flatarmála ferninganna út frá skammhliðunum tveimur er jöfn flatarmáli ferningsins út frá langhliðinni er þríhyrningurinn réthyrndur.

Texti til
útskýringar.

Sýnidæmi 1

Í réthyrndum þríhyrningi eru skammhliðarnar 2 cm og 5 cm á lengd. Finndu lengd langhliðarinnar.

Tilgata að lausn 1

Við teiknum þríhyrninginn og notum ferningaöfverðina.

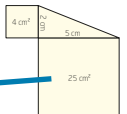
Við teiknum hjálparmynd og skráum málín sem eru þekktar á hana. Síðan reiknum við flatarmál ferninganna sem eru út frá hliðunum sem þekktar eru.

Flatarmál ferningsins út frá langhliðinni: $(4 + 25) \text{ cm}^2 = 29 \text{ cm}^2$

Ef við þekkjum flatarmál ferningsins getum við fundið hliðarlengdina með því að finna ferningsrót af flatarmálinu:

$$\sqrt{29} \approx 5,4$$

Langhliðin er um það bil 5,4 cm á lengd.



Tilgata að lausn 2

Við leysum dæmið langhlið² = skammhlið₁² + skammhlið₂²:

$$h^2 = 2^2 + 5^2$$

$$h^2 = 4 + 25$$

$$h^2 = 29$$

$$h = \sqrt{29}$$

$$h \approx 5,4$$

Venjulega eru ekki notaðar mælingar inn í jöfnum.

Samantekt á markmiðum sem vinnan fram undan byggist á.

Ýmis verkefni og spil.

Misþung verkefni.

Ýmis verkefni

Reiknivél til að reikna lánskostnað

Þetta verkefni er fyrir tvo nemendur að vinna saman.

Þið þurfið

- tölvu með töflureikni og aðgangi að netinu

Aðferð

1. Finnið tvo eða þrjá banka sem hafa á heimasíðu sinni reiknivél til að reikna út lánskostnað. Best er að slá inn leitaraðrið reiknivél á heimasíðu bankanna. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman tilboðin frá hinum mismunandi bankum.

2. Veljið lánsupphæðina 10 000 000 og lánstímann 10 ár.

3. Gerið yfirlit í töflureikni sem ber saman skilyrði mismunandi banka fyrir lánið.

Heiti banka	Lánsupphæð (kr.)	Lánstími (ár)	Vextir (%)	Mánaðarleg greiðsla (kr.)
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		
	10 000 000	10		

4. Sumir bankar gefa upp nafnvexti en aðrir gefa einnig upp hlutfallstölu vaxta. Veljið þá tegund vaxta sem þið viljið bera saman.

5. Veljið hvort þið viljið vikka töfluna út þannig að hún sýni einnig lántökugjald og annan þjónustukostnað. Sumir bankar vilja fá vitneskju um efnahag lánsúmsækjanda og greiðslugettu.

Veljið að þið ætlið að kaupa bíð fyrir 30 000 000 og að þið eigið 10 000 000 kr. í eigið fé. Veljið launin 7 000 000 kr. á ári. Skráðið þessar tölur í reiknivél sem reiknar lánskostnað og reiknið hvað þið eigið eftir þegar lánið hefur verið greitt upp.

Ýmis spennandi og krefjandi verkefni.

Í stuttu máli

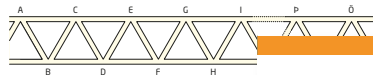
Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
reiknað út lengdir óþekktra hliða í rétthyrndum þríhyrningum	a. Hvað segir Pýtagórasreglan okkur? b. Finndu lengd langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi þar sem skammhliðarnar eru 5 m og 8 m. c. Í rétthyrndum þríhyrningi er langhliðin 13 m og önnur skammhliðin 5 cm. Finndu lengd hinnar skammhliðarinnar.	a. Í rétthyrndum þríhyrningi er ferningstala langhliðarinnar jöfn summu ferningstala skammhliðanna. $P = s^2 + s_2^2$ $P = 5^2 + 8^2$ $P = 25 + 64$ $P = 89$ $P = \sqrt{89}$ $P \approx 9,4$ Langhliðin er um það bil 9,4 m b. $P = s^2 + s_2^2$ $13^2 = 5^2 + s_2^2$ $s_2^2 = 169 - 25$ $s_2^2 = 144$ $s_2 = \sqrt{144}$ $s_2 = 12$ Hin skammhliðin er um það bil 12 cm
reiknað út hliðarlengdir í nokkrum þríhyrningum	Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er lengi	Í þríhyrningi þar sem hornin eru 30°, 60° og 90° er langhliðin tvöfalt lengri en

Þjálfaðu hugann

2.102 Lirfa nokkur étur sig í gegnum fimm binda alfræðirit sem stendur í bókahliu. Lirfan étur sig frá bls. 1 í 1. bindi og allt til síðustu blaðsíðunnar í 5. bindi. Hvert bindi er 4 cm á þykkt. Í gegnum hve marga sentimetra étur lirfan sig?

2.103 Hugsðu þér að þú sért með sex þrik sem hafa lengdirnar 1, 2, 3, 4, 5 og 6.
a. Hve marga mismunandi þríhyrninga getur þú búið til með því að nota þrjá þrikana sem hliðar?
b. Hve margir þríhyrninganna í a-lit eru rétthyrndir?

2.104 Maur byrjar í A og fetar sig milli tveggja bókstafa gegnum rörin sem sýnd eru á myndinni. Maurinn þarf alltaf að fara frá vinstri til hægri, hann má aldrei fara frá hægri til vinstri. Áð öðru leyti getur hann valið leiðina að vild.



- Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- Á hve marga mismunandi vegu kemst mauri
- Settu fram tilgátu um hvernig möguleikuna því sem fjantægðin eykst. Þrjáðu tilgátuna á hve marga mismunandi vegu maurinn kemt
- Finndu, án þess að telja, á hve marga mism. maurinn kemst frá A til O.

Bættu þig!

Þríhyrningsútreikningar

2.76 Í þríhyrningi eru tvö hornanna 63° og 48°. Hvað er þriðja hornið stórt?

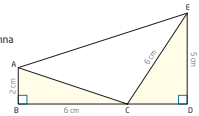
2.77 Reiknaðu lengdir óþekktu hliðanna.



2.78 Snúðu sem er með tölfr hnúta með jöfnu millibili er bundin saman þannig að hún myndar hring. Útskýrðu hvernig þú getur notað snúruhringinn til að búa til þríhyrning sem þú getur notað til ganga úr skugga um að eitt hornið sé rétt.

2.79 a. Reiknaðu út lengdir strikanna AC, CD og AE.

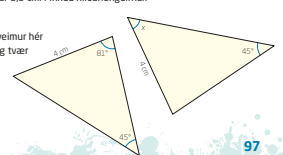
b. Finndu flatarmál ΔACE.



2.80 Í rétthyrnda þríhyrningnum ABC er ∠A = 90°, AB = 5 cm og AC = 7 cm. Athugaðu hvort ∠B er jafnt og stærra en eða minna en 60°.

2.81 Hornalína fernings er 9,9 cm. Finndu hliðarlengdirnar.

2.82 Í þríhyrningunum tveimur hér til hliðar eru tvær og tvær hliðar jafn langar. Hve stór er ∠x?



Til hamingju með námsgreinina stærðfræði!

Með kveðju frá höfundum.

Til að æfa þig enn betur!

Efnisyfirlit

4 Föll	6
Annars stigs föll	8
Ýmis verkefni: Formúlan fyrir kaðal	
í þyngdarsviðinu	13
Graf $f(x) = x^2$ og hliðranir grafsins	14
Annars stigs föll í verkefnum	
úr daglegu lífi	24
Öfugt hlutfall	28
Ýmis verkefni: Hraði og tími	29
Við reiknum miðað við einingu	30
Öfugt hlutföll í samhengi daglegs lífs	32
Markgildi	36
Í stuttu máli	38
Bættu þig!	42
Annars stigs föll	42
Öfugt hlutfall	45
Þjálfaðu hugann	47

5 Líkindareikningur	48
Frá reynslu til líkinda	50
Líkur reiknaðar út frá tilraunum	51
Ýmis verkefni: Rétt hent eða örvhent?	53
Hermun	55
Ýmis verkefni: Hermun:	
Steinn, skæri og blað	57
Samsettar líkur, margir	
atburðir	60
Að draga með og án skila	62
Ýmis verkefni: Kasta grís	64
Andstæðir atburðir	65
Ýmis verkefni: Þrjú einföld spil	
fyrir tvo	69
Ýmis verkefni: Þorir þú	
að taka áhættu?	70
Sanngjörn og ósanngjörn spil	71
Í stuttu máli	72
Bættu þig!	74
Frá reynslu til líkinda	74
Samsettar líkur, margir atburðir	76
Þjálfaðu hugann	80
Orðskýringar	82



Föll

Fall er regla sem reiknar fallgildi fyrir hverja tölu í formenginu. Fall er hægt að gefa upp sem formúlu, lista með hnitum punkta eða grafi. Fram að þessu hefur þú séð línuleg föll og empírísk föll byggð á reynslu.

Stærðfræðiorð

annars stigs fall
fleygbogi
núllstöð
hágildispunktur
lágildispunktur
útgildi
öfugt hlutfall
breiðbogi
markgildi



Nú áttu að læra um annars stigs föll og stærðir sem standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra. Gröf slíkra falla nefnast fleygbogar og breiðbogar.



Malín og Friðrik halda hvort í sinn enda á sippubandi. Endarnir eru jafnhátt yfir jörð og bandið snertir hvergi jörðina. Lýstu grafinu sem táknar lögun bandsins.

Annars stigs föll

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- þekkja annars stig föll
- teikna fleygboga út frá fallstæðunni
- ákveða topp- eða botnpunkt fleygboga
- finna jöfnu annars stigs falls þegar þú þekkir graf þess
- lýsa hliðrun fallsins x^2 í $(x - a)^2 + b$

Línulegu falli er hægt að lýsa með jöfnu á forminu

$$y = ax + b$$

þar sem a er hallatala línu og $(0, b)$ er skurðpunktur hennar við y -ás.

Við notum oft y í staðinn fyrir $f(x)$ þegar við ætlum að skrifa jöfnu línulegs falls.

Það er af því að línuleg föll er hægt að setja fram á marga ólíka vegu.

Til dæmis getur formið

$$ax + by = c$$

verið hentugt í mörgum tilvikum.

Í fyrri jöfnunni táknar a hallatöluna og b y -gildið þar sem línan sker y -ásinn.

Í seinni jöfnunni er hallatalan $-\frac{a}{b}$.

Línan sker y -ásinn þegar $x = 0$ og $y = \frac{c}{b}$, og hún sker x -ásinn þegar $x = \frac{c}{a}$ og $y = 0$.

Skurðpunktur grafsins við x -ásinn er líka nefndur **núllstöð** fallsins. Hægt er að reikna hann með því að leysa jöfnuna $y = 0$ eða $f(x) = 0$.

Sýnidæmi 1

Gefin er línan $y = 2x - 3$.

- Finndu hallatöluna og skurðpunktana við ásana.
- Teiknaðu línuna í hnitakerfi. Sýndu samhengið milli línunnar og svaranna við a.

Tillaga að lausn

- Hallatalan er talan framan við x þegar jafnan er skrifuð á forminu $y = ax + b$.

Hallatalan er 2



Skurðpunktinn við y -ásinn finnum við með því að setja $x = 0$.

$$y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Skurðpunkturinn er $(0, -3)$

Skurðpunktinn við x -ásinn finnum við með því að setja $y = 0$.

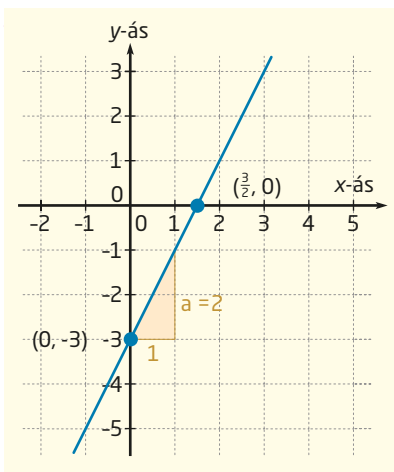
$$0 = 2 \cdot x - 3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Skurðpunkturinn er $(\frac{3}{2}, 0)$

b



4.1 Finndu hallatöluna og skurðpunktana við ásana fyrir línurnar hér fyrir neðan. Teiknaðu gröfin.

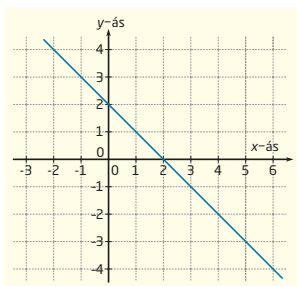
a $y = 4x + 8$

b $y = -x + 1$

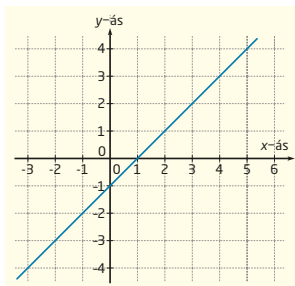
c $y = \frac{1}{3}x - 3$

4.2 Ákvarðaðu jöfnur beinu línanna hér fyrir neðan.

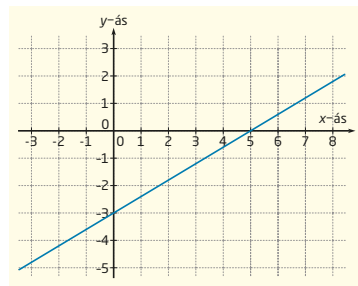
a



b



c



- 4.3 Gefin er línan $y = -3x + 6$.
- a Finndu hallatöluna og skurðpunktinn við y -ásinn.
 - b Settu $y = 0$ og reiknaðu x -gildið þar sem línan sker x -ásinn.
 - c Teiknaðu línuna í hnitakerfi.

- 4.4 Gefin er línan $2x - y = 3$.
- a Settu $x = 0$ og finndu skurðpunktinn við y -ásinn.
 - b Settu $y = 0$ og finndu skurðpunktinn við x -ásinn.
 - c Teiknaðu línuna í hnitakerfi.
 - d Ákvarðaðu hallatölu línunnar.

- 4.5 Lína er gefin með jöfnunni $ax + by = c$.
- a Leystu jöfnuna með tilliti til y og sýndu að línan hefur hallatöluna $-\frac{a}{b}$.
 - b Settu $x = 0$ og sýndu að skurðpunkturinn við y -ásinn er $(0, \frac{c}{b})$.
 - c Settu $y = 0$ og sýndu að skurðpunkturinn við x -ásinn er $(\frac{c}{a}, 0)$.

Annars stig fall hefur formið

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

þar sem a , b og c eru fastar (tölur) og x er breyta.

Graf þannig falls nefnist **fleygbogi**.



Sýnidæmi 2

Bolta er spyrrt upp í loft. Braut boltans má lýsa með jöfnunni

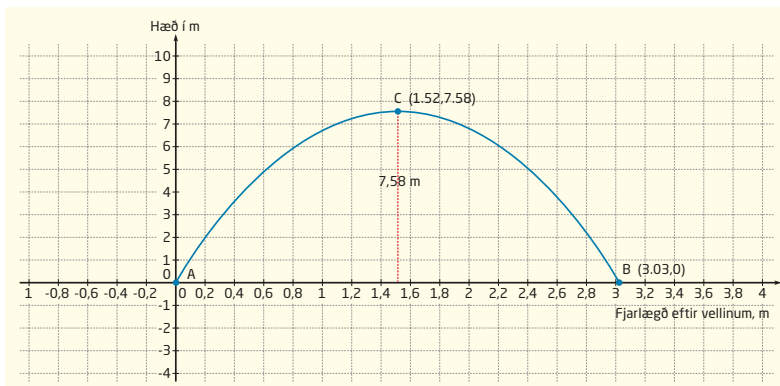
$$f(x) = -3,3x^2 + 10x$$

þar sem $f(x)$ er hæðin yfir vellinum, og x er fjarlægðin frá upphafspunkti út eftir vellinum.

- Teiknaðu graf f með teikniforriti.
- Finndu hæsta punkt brautar boltans.
- Hve langt út eftir vellinum er boltanum spyrrt?

Tillaga að lausn

- Teiknaðu grafið fyrst án takmarkana. Teiknaðu síðan nýtt graf þannig að braut boltans fari ekki niður fyrir yfirborð vallarins. Gerðu fyrra grafið ósýnilegt.
- Þú getur notað skipunina „Útgildi“ til að finna hæsta punktinn.



Boltinn er í hæsta punkti þegar hann er um það bil 1,5 m frá upphafspunkti, mælt út eftir vellinum. Hann er þá í um það bil 7,6 m hæð yfir vellinum.

- Grafið sker x -ásinn í punktinum (3,03, 0). Það þýðir að boltanum er spyrrt um það bil 3 m, mælt út eftir vellinum.

Útgildi er samheiti lággildis og hággildis. Er notað í teikniforritum.

Dæmið sýnir að graf falls með x^2 -lið lítur allt öðru vísi út en graf línulegs falls. Bogaformið er einkennandi fyrir slík gröf. Við nefndum það *fleygboga*.

Formengi falls er mengi allra gilda sem x getur tekið. Ef x má einungis taka jákvæð gildi er formengið skráð þannig: $x > 0$.

Ef x má taka gildi milli -10 og 10 er formengið skráð þannig: $-10 < x < 10$.

Ef endapunktarnir eiga að vera með er skráð: $-10 \leq x \leq 10$.



Formengi, mengi allra x -gilda sem fall gildir fyrir.

- 4.6 1. janúar var snjódýptin á Hrafnseyrarheiði 120 cm. Þegar x dagar voru liðnir af árinu var snjódýptin $d(x)$ mæld í cm gefin með fallstæðunni

$$d(x) = 0,3x^2 - 8x + 120$$

- a Teiknaðu graf d með teikniforriti. Veldu formengi á bilinu $0 < x < 30$.
- b Hver var snjódýptin 20. janúar?
- c Hvenær var snjódýptin minnst og hve mikill snjór var þá?

- 4.7 Flatarmálið F á rétthyrndri mynd er gefin með formúlunni

$$F(x) = 32x - x^2$$

þar sem x er breiddin á myndinni mæld í sentimetrum.

- a Þáttaðu stærðina $32x - x^2$ og ákvarðaðu formengi F .
- b Teiknaðu graf F í hnitakerfi. Notaðu formengið sem þú fannst í a.
- c Notaðu grafið til að ákveða lengd og breidd myndarinnar þegar flatarmálið er 252 cm^2 .

- 4.8 Stálþráður er 40 cm langur. Honum er skipt í tvo búta sem eru notaðir til að búa til tvo ferninga.

- a Látum x vera hliðina í öðrum ferningnum. Hver er þá hliðin í hinum ferningnum?
- b Sýndu að samanlagt flatarmál beggja ferninganna er

$$F(x) = 2x^2 - 20x + 100$$

- c Teiknaðu graf F í hnitakerfi.
- d Ákvarðaðu minnsta gildið sem samanlagt flatarmál getur haft.

Formúlan fyrir kaðal í þyngdarsviðinu

Prír eða fjórir nemendur eru í hverjum hóp

Þið þurfið

- kaðal í mismunandi lengdum, einn fyrir hvern hóp
- metrakvarða, einn fyrir hvern hóp
- málband (10 m), eitt fyrir hvern hóp
- blað með töflu yfir x og y-gildi
- verkefnablað 3.4.1



Aðferð

- 1 Tveir nemendur halda hvor í sinn enda kaðalsins og standa svo fjarri hvor öðrum að kaðallinn nái hvergi niður á leikvöllinn. Athugið: Kaðallinn á að vera slakur og mynda boga á milli nemendanna. Gætið þess að báðir nemendurnir haldi kaðlinum jafn hátt.
- 2 Leggið málbandið á völinn þannig að það sýni 0 við annan nemandann. Standið á endanum svo að málbandið færist ekki til. Hinn nemandinn stendur á málbandinu þar sem það sýnir fjarlægðina milli nemendanna.
- 3 Þriðji nemandinn tekur metrakvarðann og mælir hæð kaðalsins beint yfir núllpunktinum og endurtekur mælinguna eftir hverja 10 cm út eftir leikvöllinum. Síðasta mælingin á að vera hjá hinum nemandanum. Færið niðurstöðurnar inn í töflu. x-gildin eru tölurnar út eftir leikvöllinum og y-gildin eru hæðirnar sem mældar voru.

Farið með mælingarnar inn í kennslustofuna. Fylgið skýringum á verkefnablaði 3.4.3 og teiknið graf.

Útbúið sýningu á niðurstöðunum þar sem fallstæðan kemur fram.

Er nokkurt útgildi?

Sker grafið x-ásinn?

Sker grafið y-ásinn?

Lýsið verkefninu og dragið ályktanir.

Berið niðurstöðurnar saman við niðurstöður hinna hópanna.

Útgildi er sameiginlegt heiti á gildum í hæstu og lægstu punktum.

Graf $f(x) = x^2$ og hliðranir grafsins

Annars stigs fall,

fall á forminu

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

þar sem a , b og c

eru fastar (tölur),

og x er breyta, a

er ekki núll.

Tölugildi tölu,
þegar talað er um
tölugildi tölu er litið
fram hjá formerkinu.

Við skráum

$$|3| = 3 \text{ og } |-3| = 3.$$

$$f(x) = x^2$$

Einfaldasta annars stigs fallið er

$$f(x) = x^2$$

Áður en við teiknum grafið skulum við reyna að skilja hvernig það lítur út.

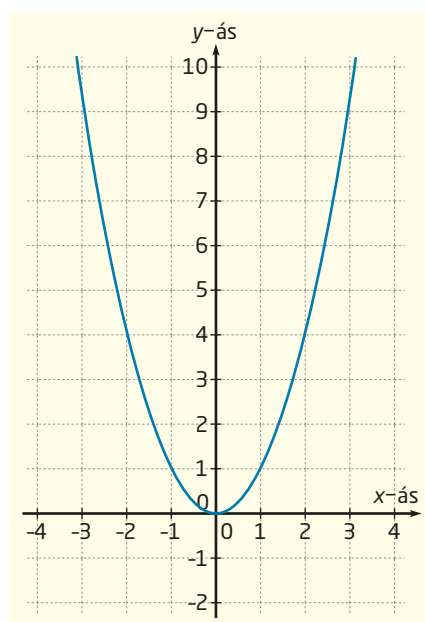
Fallstæðan sýnir að hefja á x -gildin upp í annað veldi. Þá vitum við að svarið er alltaf jákvætt. Eina undantekningin er $x = 0$ en þá er fallgildið líka 0. Grafið gengur í gegnum upphafspunktinn $(0, 0)$ og liggur ofan við x -ásinn.

Ennfremur sjáum við að við fáum sama fallgildi hvort sem x er jákvætt eða neikvætt þegar tölurnar hafa sama tölugildi.

Til dæmis er $f(1) = 1^2 = 1$ og $f(-1) = (-1)^2 = 1$.

Á sama hátt er $f(2) = f(-2) = 4$.

Við sjáum að $f(a) = f(-a) = a^2$ fyrir öll gildi á a .



Það þýðir að fallgildin eru hin sömu fyrir hver tvö gildi sem eru jafnlangt frá y -ásnum hvort sínu megin við 0. Þá hlýtur grafið að vera samhverft um y -ásinn og ganga í gegnum upphafspunkt. Það verður brattara eftir því sem x stækkar af því að x er hafið upp í annað veldi.

Til vinstri er grafið teiknað í teikniforriti.

Fallgildin eru
gildin á y -ásnum.

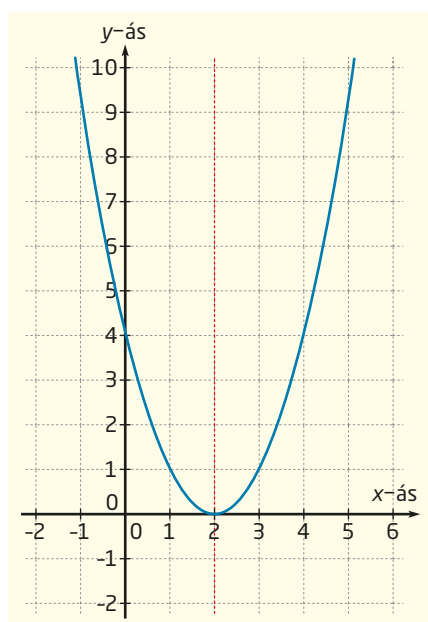
- 4.9**
- a** Teiknið graf $f(x) = x^2$. Veljið heiltölugildi frá -4 til 4 .
 - b** Hvert er fallgildi f þegar $x = 10$?
 - c** Hvaða x -gildi gefa fallgildið 169?

Lárétt hliðrun

Hvernig breytist grafið ef við setjum $(x - 2)$ í staðinn fyrir x ?
Það er að segja að fallið verður

$$h(x) = (x - 2)^2$$

- $x = 2$ gefur fallgildið 0.
- $x = 1$ og $x = 3$ gefa fallgildið 1 af því að $(1 - 2)^2 = (-1)^2 = 1$ og $(3 - 2)^2 = 1^2 = 1$.
- $x = 0$ og $x = 4$ gefa fallgildin 4 af því að $(0 - 2)^2 = (-2)^2 = 4$ og $(4 - 2)^2 = 2^2 = 4$.



Ef við veljum x -gildi sem eru tveimur einingum stærri en í fallinu x^2 fær nýja fallið sama fallgildi. Það þýðir að grafið flyst tvær einingar til hægri og nýja grafið verður samhverft um línuna $x = 2$.

Við sjáum að $h(x) = f(x - 2)$. Þegar við reiknum fallgildi h fyrir tiltekin x -gildi, getum við sem sagt litið á samsvarandi fallgildi f þar sem x -gildið er tveimur einingum lægra.

4.10 Þú skalt nota teikniforrit til að leysa þetta verkefni.

- Búðu til rennistiku a sem getur tekið gildi milli -5 og 5 . Teiknaðu graf fallsins $h(x) = (x - a)^2$.
- Breyttu a -gildunum og lýstu því hvað gerist með grafið.
- Semdu setningu um hvernig fallið $f(x) = x^2$ breytist þegar þú dregur tölu frá eða leggur tölu við x .

Látum fallið f vera $f(x) = x^2$. Þá er $f(x - a) = (x - a)^2$ hliðrun grafsins um a einingar til hægri ef a er jákvæð tala. Ef a er neikvæð tala flyst grafið til vinstri.

Lóðrétt hliðrun

Hvernig hliðrast grafið ef við bætum tölu við eða drögum tölu frá öllum fallgildum?
Lítum á fallið

$$g(x) = x^2 - 4$$

Botnpunktur

er punktur sem hefur lægra fallgildi en allir punktarnir í nágrenninu, sama og lággildis-punktur.

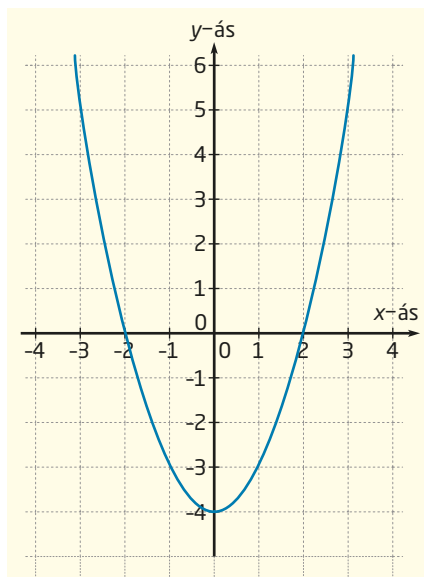
Við sjáum að $g(x) = f(x) - 4$. Til að finna fallgildi g fyrir tiltekin x -gildi getum við tekið samsvarandi fallgildi f og dregið 4 frá. Það hlýtur að þýða að grafið flyst fjórar einingar niður fyrir y -ásinn og að það er áfram samhverft um y -ásinn. Botnpunkturinn verður $(0, -4)$.

Þú hefur lært samokaregluna og þá sérðu kannski að það má einnig rita g á forminu

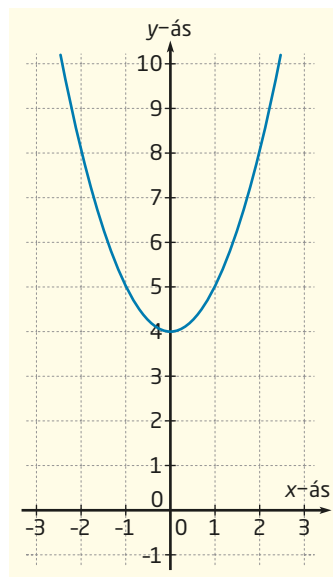
$$g(x) = (x - 2)(x + 2)$$

Nú sjáum við að $g(x) = 0$ þegar $x = 2$ og $x = -2$, og þá sker grafið x -ásinn í punktunum $(2, 0)$ og $(-2, 0)$. Þeir samsvara punktunum $(2, 4)$ og $(-2, 4)$ á grafi f . Sjá grafið vinstra megin hér fyrir neðan.

Á sama hátt hliðrast graf $f(x) + 4 = x^2 + 4$ fjórar einingar upp eftir y -ásnum. Þetta graf sker x -ásinn hvergi, sjá grafið hér að neðan til hægri.



$$g(x) = x^2 - 4$$



$$f(x) + 4 = x^2 + 4$$

Látum fallið f vera $f(x) = x^2$. Þá er $f(x) + b = x^2 + b$ hliðrun grafsins um b einingar eftir y -ásnum. Ef b er neikvæð tala hliðrast grafið niður á við, og ef b er jákvæð tala hliðrast það upp á við.

4.11 Þú skalt nota teikniforrit í þessu verkefni.

- Búðu til rennistiku b sem getur tekið gildi frá -5 til 5 . Teiknaðu graf fallsins $g(x) = f(x) + b = x^2 + b$.
- Breyttu b -gildunum og lýstu því hvað verður um grafið.
- Búðu til setningu um hvernig fallið $f(x) = x^2$ breytist þegar þú dregur tölu frá eða bætir tölu við $f(x)$.

Lárétt og lóðrétt hliðrun

Ef við drögum saman það sem við gerðum til að fara frá f í h og í g , með lárétttri hliðrun og lóðrétttri hliðrun fáum við fallið

$$k(x) = (x - 2)^2 - 4$$

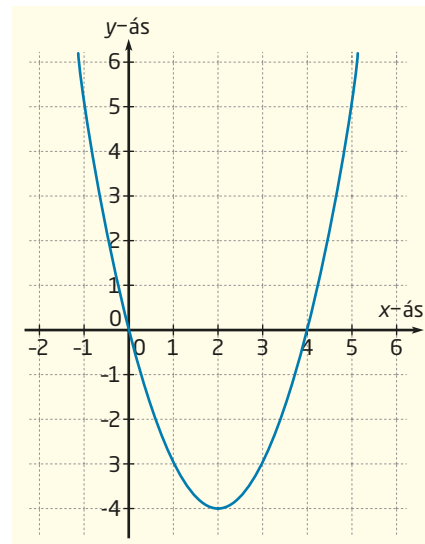
Hér hefur f verið hliðrað um tvær einingar til hægri og fjórar einingar niður á við. Botnpunkturinn hefur flust frá $(0, 0)$ til $(2, -4)$, og grafið sker x -ásinn í punktunum $(0, 0)$ og $(4, 0)$. Sjá grafið til hægri.

Ef við margföldum upp úr sviganum og drögum saman sjáum við að það er líka hægt að rita k

$$k(x) = (x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$$

Ef við þáttum k fáum við $k(x) = x(x - 4)$.

Þá sjáum við að $k(x) = 0$ þegar $x = 0$ og $x = 4$.

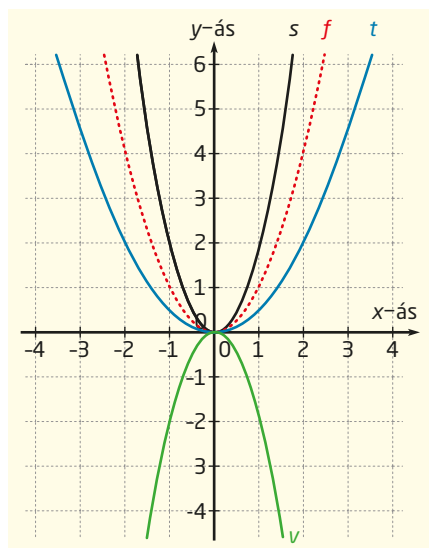


4.12 Þú skalt nota teikniforrit við þetta verkefni.

- a Búðu til tvær rennistikur a og b sem geta tekið gildi frá -5 til 5 . Teiknaðu graf fallsins $h(x) = f(x - a) + b = (x - a)^2 + b$.
- b Láttu a og b taka breytileg gildi og lýstu því hvernig grafið breytist.
- c Búðu til setningu um hvernig fallið $f(x) = x^2$ breytist þegar þú dregur tölu frá eða bætir tölu við x og dregur um leið tölu frá eða bætir tölu við $f(x)$.

Látum fall f vera $f(x) = x^2$. Þá er $f(x - a) + b = (x - a)^2 + b$ hliðrun grafsins um a einingar til hægri og b einingar upp eftir y -ásnum ef a og b eru jákvæðar tölur. Ef a er neikvæð tala hliðrast grafið til vinstri og ef b er neikvæð tala hliðrast það niður á við.





Prengra og víðara graf

Nú er eftir að sjá hvernig grafið lítur út ef við margföldum fallið með fasta, til dæmis $s(x) = 2x^2$. Þá tvöfaldast öll fallgildin í samanburði við upprunalega fallið f . *Fleygboginn* þrengist. Ef við margföldum með tölu sem er minni en 1, minnka fallgildin miðað við upprunalega fallið f . *Fleygboginn* víkkar.

Á myndinni er svarta grafið $s(x)$, rauða punktagrafið er $f(x)$ og bláa grafið er $t(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Hvað ef við margföldum með neikvæðri tölu, til dæmis $v(x) = -2x^2$? Þá verða öll fallgildin neikvæð í staðinn fyrir jákvæð. Graf v verður spegilmynd grafs s um x -ásinn, sjá græna grafið á myndinni.

Fallið fær *topppunkt* í stað botnpunkts.

Fleygbogi, graf annars stigs falls.

Topppunktur, punktur sem hefur hærra fallgildi en aðrir punktar í grenndinni. Topppunktur er annað orð fyrir hágildispunktur.

4.13 Þú skalt nota teikniforrit í þessu verkefni.

- Búðu til rennistiku c sem getur tekið gildin frá -5 til 5 . Teiknaðu graf fallsins $g(x) = c \cdot f(x) = cx^2$.
- Láttu c taka breytileg gildi og lýstu því hvað verður um grafið.
- Búðu til setningu um það hvernig fallið $f(x) = x^2$ breytist þegar þú margfaldar fallið með fastri tölu. Greindu á milli jákvæðra og neikvæðra talna og milli tölugilda stærri og minni en 1.



Sýnidæmi 3

Lýstu því hvernig líta má á gröf fallanna hér að neðan sem hliðrun upp, til hægri, til vinstri, þrengingu, víkkun og speglun um x-ásinn með tilliti til grunnfallsins $f(x) = x^2$.

Útskýrðu líka hverjir eru samhverfuásar fallanna og hvar botnpunktur/ topppunktur hvors þeirra er. Teiknaðu megindrætti grafa þeirra.

a $g(x) = (x + 5)^2 - 1$

b $h(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 - 4$

Tillaga að lausnum

a Í sviganum stendur $(x + 5)$. Það þýðir að graf x^2 hliðrast um 5 einingar til vinstri. Þá er grafið samhverft um línuna $x = -5$.

Í fallinu stendur líka -1 . Það þýðir að grafið hliðrast um eina einingu niður. Lágildispunkturinn hefur sem sagt hliðrast um fimm einingar til vinstri og eina einingu niður, það er að segja í $(-5, -1)$.

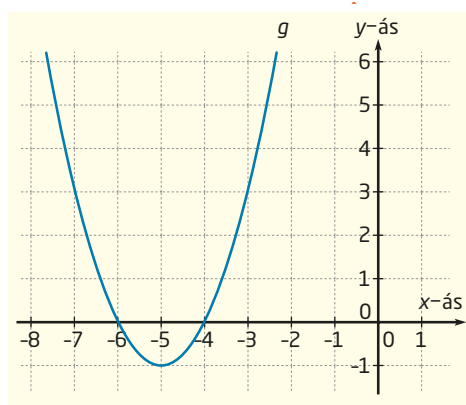
b Í sviganum stendur $(x - 1)$. Það þýðir að graf x^2 hliðrast um eina einingu til hægri. Framan við svigann stendur $-\frac{1}{4}$. Það þýðir að grafið speglast um x-ásinn og hefur hágildispunkt í stað lággildispunkts og að grafið er víðara af því að öll y-gildin verða fjórðungur af upprunalegu gildunum. Í fallinu stendur -4 , svo að fallið hliðrast um 4 einingar niður á við.

Hágildispunkturinn er $(1, -4)$, og samhverfuásinn er $x = 1$.

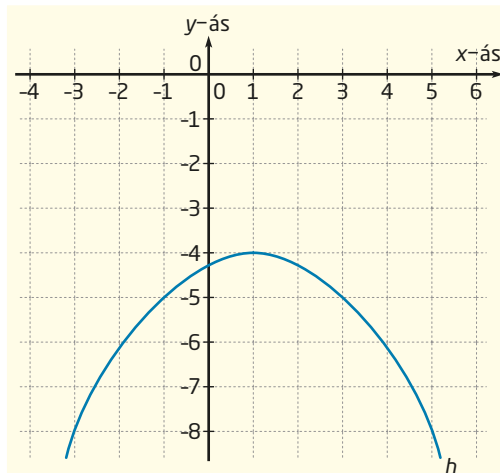
Hágildispunktur, punktur sem hefur hærra y-gildi en allir aðrir nálægir punktar hægri eða vinstra megin við punktinn.

Lággildispunktur, punktur sem hefur lægra y-gildi en allir aðrir nálægir punktar hægri eða vinstra megin við punktinn.

Graf g lítur svona út:



Graf h lítur svona út:



- 4.14 Lýstu því hvernig líta má á gröf fallanna hér fyrir neðan sem hliðrun upp, niður, til hægri, til vinstri, þrengingu, víkkun og speglun á grunnfallinu $f(x) = x^2$. Finndu líka samhverfuása fallanna og hvar botnpunktur/ topppunktur þeirra eru. Teiknaðu meginrætti grafanna.

a $g(x) = x^2 + 5$

c $k(x) = (x - 3)^2$

e $p(x) = (x + 4)^2$

b $h(x) = x^2 - 3$

d $r(x) = 3x^2$

f $s(x) = (x - 5)^2 - 2$

- 4.15 Skrifaðu föllin í æfingu 4.14 á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Gerðu grein fyrir hvar föllin skera y -ásinn.

- 4.16 Lýstu því hvernig líta má á gröf fallanna hér fyrir neðan sem hliðrun upp, niður, til hægri, til vinstri, þrengingu, víkkun og speglun á grunnfallinu $f(x) = x^2$. Finndu líka samhverfuása fallanna og hvar botnpunktur/ topppunktur þeirra eru. Teiknaðu meginrætti grafanna.

a $g(x) = 2(x - 1)^2$

d $r(x) = (x - 4)^2 - \frac{3}{4}$

b $h(x) = (x + 1)^2 - 2$

e $p(x) = -(x - 3)^2$

c $k(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

f $s(x) = -2x^2 + 2$

- 4.17 Skrifaðu föllin í æfingu 4.16 á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Gerðu grein fyrir hvar föllin skera y -ásinn.

- 4.18 Lýstu því hvernig líta má á gröf fallanna hér fyrir neðan sem hliðrun upp, niður, til hægri, til vinstri, þrengingu, víkkun eða speglun á grunnfallinu $f(x) = x^2$. Finndu líka samhverfuása fallanna og hvar botnpunktur/ topppunktur þeirra eru. Teiknaðu meginrætti grafanna.

a $g(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 + 6$

d $r(x) = -(x - 4)^2 + 4$

b $h(x) = -3(x + 1)^2 - \frac{3}{2}$

e $p(x) = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$

c $k(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 2$

f $s(x) = x^2 - 6x + 9$

- 4.19 Skrifaðu föllin í æfingu 4.18 á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Gerðu grein fyrir hvar föllin skera y -ásinn.

Grafið sker alltaf x-ásinn.

A

Grafið sker alltaf y-ásinn.

B

Nefndu eiginleika sem á við annars stigs föll.

Grafið hefur alltaf botnpunkt.

C

Fallið hefur alltaf núllstöð.

D



4.20 Hver eða hverjir nemendanna hafa rétt fyrir sér?

4.21 Annars stigs fall er gefið með

$$f(x) = (x - 100)^2$$

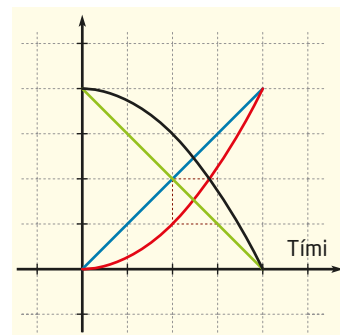
- a Ákvarðaðu skurðpunktinn við y-ásinn ef hann er til.
- b Ákvarðaðu skurðpunkta við x-ásinn ef þeir eru til.

4.22 Finndu fallstæðu fyrir annars stigs fall sem

- a hefur botnpunkt og sker x-ásinn á tveimur stöðum
- b hefur topppunkt og sker x-ásinn á tveimur stöðum
- c hefur topppunkt og sker aldrei x-ásinn
- d hefur botnpunkt og sker aldrei x-ásinn

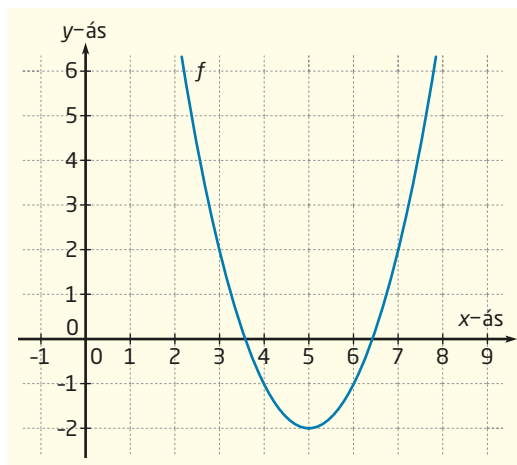
4.23 Hver grafanna til hægri geta sýnt

- a hæð bolta sem er kastað af svölum
- b hraða bolta sem er kastað af svölum
- c fjarlægð frá upphafpunkti bolta sem rúllar eftir velli
- d vegalengdina sem manneskja á eftir þegar hún hleypur 60 m



Sýnidæmi 4

Finndu fallstæðu fallsins sem sett er fram með þessu grafi:

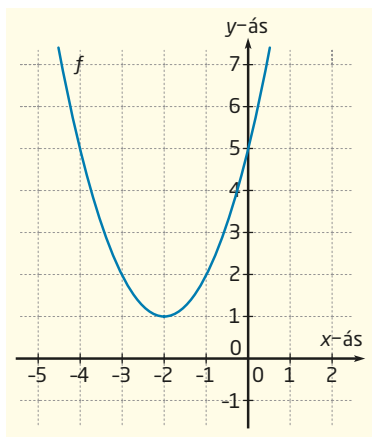


Tillaga að lausn

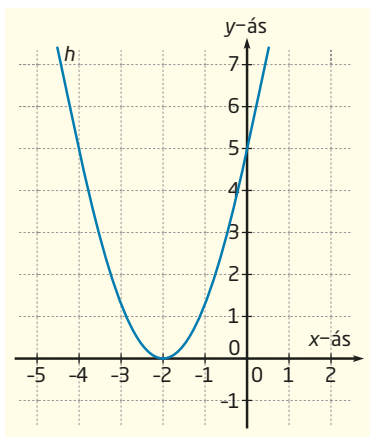
Botnpunkturinn er $(5, -2)$. Það þýðir að x^2 hefur hliðrast um 5 einingar til hægri og tvær einingar niður. Punktarnir $(1, 1)$ og $(2, 4)$ hafa hliðrast í samræmi við það svo að lögun grafsins hefur ekki breyst. Fallið er $f(x) = (x - 5)^2 - 2$.

4.24 Finndu fallstæður fallanna sem sett eru fram með þessum gröfum.

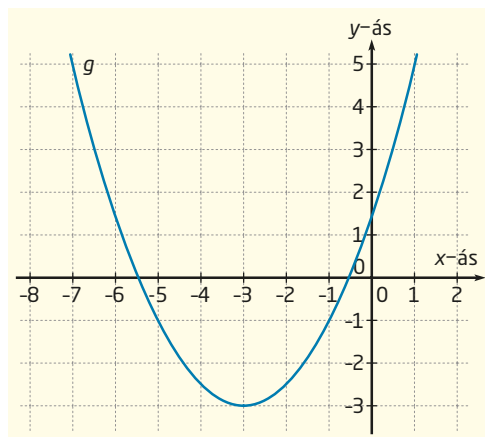
a



b



c



4.25 Teiknaðu megindrætti grafa annars stigs fallanna hér að neðan og finndu fallstæðurnar fyrir þau þegar



a bæði núllstöðin og botnpunkturinn er (3, 0) og punkturinn (1, 4) liggur á grafinu

b núllstöðvarnar eru (−2, 0) og (2, 0) og topppunkturinn er (0, 4)



c núllstöðvarnar eru (1, 0) og (3, 0) og botnpunkturinn er (2, −1)

d núllstöðvarnar eru (−5, 0) og (1, 0) og topppunkturinn er (−2, 9)



e núllstöðvarnar eru (−3, 0) og (−1, 0) og botnpunkturinn er (−2, −2)

f núllstöðvarnar eru (0, 0) og (8, 0) og topppunkturinn er (4, 8)

4.26 Notaðu föllin úr dæminu hér fyrir ofan.

a Finndu samhverfuása fallanna.

b Segðu til um hvort gröf fallanna skera y -ásinn.

4.27 $f(x) = x^2 + 4x - 3$

a Graf $g(x)$ er spegilmynd af $f(x)$ um x -ásinn. Hver er fallstæða $g(x)$?

b Graf $h(x)$ er spegilmynd $f(x)$ um y -ásinn. Hver er fallstæða $h(x)$?

4.28 Notaðu tekniforrit. Búðu til rennistiku a með gildum frá −10 til 10. Teiknaðu gröf fallanna tveggja

$$f(x) = (x + a)^2 - 2$$

$$g(x) = -(x - a)^2 + 2$$

Notaðu tekniforritið til að ákvarða fyrir hvaða gildi á a hafi jafnan $f(x) = g(x)$ eina lausn, tvær lausnir eða enga lausn.

Annars stigs föll í verkefnum úr daglegu lífi

Annars stigs fall kemur oft fyrir sem stærðfræðilíkan í margs konar verkefnum úr daglegu lífi og umhverfi. Í upphafi kaflans sástu dæmi um bolta sem var kastað upp í loft. Öll köst er hægt að setja fram sem annars stigs föll ef litið er framhjá loftmótstöðunni.

Annars stigs föll eru notuð í hagfræði til að setja fram kostnaðarlíkon í fyrirtækjum. Við skulum líta á eitt slíkt dæmi.

Sýnidæmi 5

Fyrirtæki framleiðir göngustafi sem eru seldir í netverslun. Kostnaðinn á mánuði í þúsundum króna, $K(x)$, má setja fram sem annars stigs fall þar sem x er fjöldi stafapara sem fyrirtækið framleiðir:

$$K(x) = 0,05x^2 + 3x + 240 \quad 0 < x < 200$$

Formengið, það er að segja hvaða x -gildi eiga við, segir til um hve marga stafi fyrirtækið getur framleitt á mánuði.

- a Teiknið graf K og notið grafið til að ákvarða hve mikið kostar að framleiða 80 pör af stöfum á mánuði.
- b Hve marga stafi getur fyrirtækið framleitt fyrir 400 þús. kr.?

Fyrirtækið selur stafina á 13,6 þús. kr. parið.

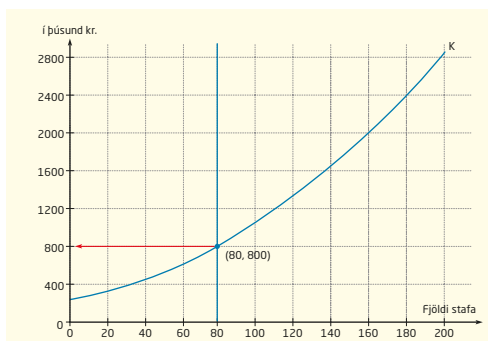
- c Settu fram fall $T(x)$ sem lýsir tekjum fyrirtækisins ef það selur x pör af stöfum á einum mánuði. Teiknaðu tekjufallið í sama hnitakerfi og kostnaðarfallið.
- d Notaðu gröfin til að finna hvenær kostnaður og tekjur eru jafnhá.
- e Hve mörg stafapör þarf fyrirtækið að framleiða til að það geti verið rekið með hagnaði?





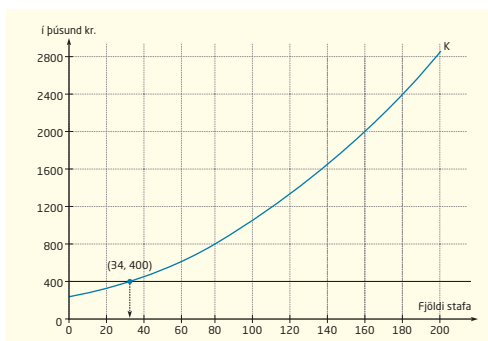
Tillaga að lausn

- a Við veljum x -gildið 80 og lesum y -gildið:



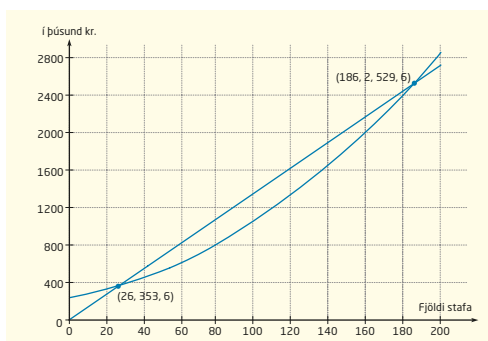
Það kostar 800 þúsund kr. að framleiða 80 stafapör.

- b Við veljum fallgildið 400 og lesum x -gildið:



Það er hægt að framleiða 34 pör af stöfum fyrir 400 þúsund kr. á mánuði.

- c $T(x) = 13,6x$



- d Þegar gröf K og T skerast er kostnaðurinn jafnhár tekjunum.
Við sjáum að það verður þegar $x = 26$ og $x = 186$.
- e Ef fyrirtækið á að vera rekið með hagnaði verður það að framleiða
og selja milli 26 og 186 stafapör á mánuði.



- 4.29** Notaðu föllin $K(x) = 0,05x^2 + 3x + 240$ og $T(x) = 13,6x$ frá sýnidæmi 5. Hagnaður fyrirtækisins við framleiðslu og sölu x stafapara á mánuði er tekjur að fráðregnum kostnaði. Við getum skrifað

$$H(x) = T(x) - K(x)$$

- a** Finndu stæðu fyrir hagnaðarfallið $H(x)$ og teiknaðu graf þess í teikniforriti. Hvers konar fall er þetta?
- b** Notaðu grafið til að ákveða hve mörg stafapör fyrirtækið þarf að framleiða og selja til að ná hámarkshagnaði. Hve mikill er hagnaðurinn þá?
- c** Hve mikið er tap fyrirtækisins ef það framleiðir og selur 200 stafapör á mánuði?

- 4.30** Steini er kastað af brú. Hæðin h , mæld í metrum yfir vatninu t sekúndum eftir að steininum var kastað, er

$$h(t) = 15t + 20 - 4,9t^2$$

- a** Úr hvaða hæð yfir vatninu var steininum kastað?
- b** Hver er hámarkshæð steinsins?
- c** Hve lengi er steinninn í meira en 20 m hæð yfir vatninu?
- d** Hve langur tími líður frá því að steininum var kastað þar til hann lendir á vatninu?

- 4.31** Hæð bolta, h , t sekúndum eftir að honum er kastað, er ákveðin af fallinu

$$h(t) = 15t - 4,9t^2 + 3$$

þar sem h er hæðin yfir vellinum mæld í metrum.

- a** Teiknaðu graf h .
- b** Hve langur tími líður frá því að boltanum er kastað þar til hann lendir á vellinum?
- c** Ákvarðaðu hámarkshæð boltans.
- d** Hve lengi er boltinn í meira en 12 m hæð yfir vellinum?





4.32 Bóndi ætlar að girða utan um rétthyrnt svæði með 100 m girðingu.

- a** Látum svæðið vera x metra breitt og táknaðu lengdina út frá x .
- b** Sýndu að flatarmálið er fall af x og má rita sem $F(x) = -x^2 + 50x$. Teiknaðu graf A með teikniforriti.
- c** Ákvarðaðu breidd svæðisins þegar flatarmálið er 525 m^2 .
- d** Finndu stærsta flatarmálið sem svæðið getur haft.

4.33 Lengd rétthyrndrar myndar er 5 cm minni en þreföld breiddin.

Notaðu teikniforrit og ákvarðaðu lengd og breidd myndarinnar þegar flatarmálið 782 cm^2 .

4.34 Bolta er kastað upp í loft. Hæðin $h(t)$ er hæðin yfir vellinum mæld í metrum t sekúndum eftir að boltanum var kastað.

$$h(t) = 2 + 4t - 4,9t^2$$

- a** Úr hve mikilli hæð yfir vellinum var boltanum kastað?
- b** Teiknaðu graf h í hnitakerfi. Notaðu gjarnan teikniforrit.
- c** Ákvarðaðu hæsta punkt brautar boltans. Hve hátt er boltinn þá yfir vellinum og hve langur tími líður þar til boltinn nær hæsta punkti sínum?
- d** Hve lengi er boltinn í loftinu?

Öfugt hlutfall

Rétt hlutfall,
stærðirnar
 x og y standa
í réttu hlutfalli
hvor við aðra
þegar $\frac{y}{x}$ er fasti,
 $x \neq 0$.

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- sjá samhengið milli stærða sem standa í réttu hlutfalli og öfugu hlutfalli hvor við aðra
- setja öfugt hlutfall fram á mismunandi vegu
- athuga hvort stærðir standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra
- finna markgildi nokkurra falla

Áður hefur þú unnið með stærðir sem standa í réttu hlutfalli hver við aðra. Það er mikilvægt að muna hvað rétt hlutfall er til að geta skilið öfugt hlutfall.

4.35 Hver þessara falla lýsa réttu hlutfalli?

a $y = x - 4$

c $y = 3x^2$

e $y = \frac{5}{x}$

b $y = -5x$

d $y = \frac{1}{3}x$

f $\frac{y}{x} = 10$

Tvær stærðir x og y
standa í réttu hlutfalli
hvor við aðra þegar
 $\frac{x}{y} = k, x \neq 0$

4.36 Sýna gildatöflurnar stærðir sem standa í réttu hlutfalli hvor við aðra? Finndu hlutfallsfastann þar sem það er hægt.

a

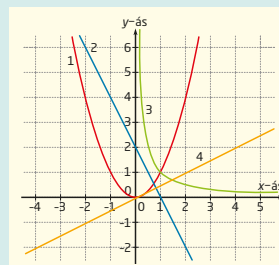
x	3	4	8	12
y	9	12	24	36

b

x	0	5	7	15
y	0	10	21	60

4.37 Ræðið svör nemendanna. Hver eða hverjir nemendanna hafa rétt fyrir sér?

Sýna nokkur þessara grafa
rétt hlutfall?



Ég held að
nr. 1 og nr. 4
sýni rétt hlutfall
af því að þau
ganga í gegnum
upphafspunkt.

A

Ég held að nr. 2
og nr. 4 sýni rétt
hlutfall af því að
þau eru beinar
línur.

B

Ég held að nr. 4
sýni rétt hlutfall
af því að það er
bein lína sem
gengur í gegnum
upphafspunkt.

C

Ég held að nr. 3
sýni rétt hlutfall af
því að það er hvorki
bein lína né gengur
í gegnum
upphafspunkt.

D

Hraði og tími

Vinnið í fjögurra manna hópum.

Þið þurfið

- reiðhjól með hraðamæli
- langt málband eða mælihjól
- stoppúr



Aðferð

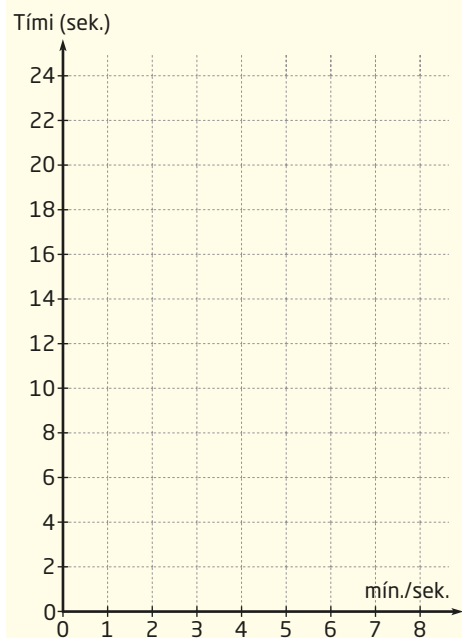
- 1 Mælið út 100–120 m vegalengd. Mælið nákvæmlega. Allir í hópnum hjóla hver sitt skipti með sínum hraða. Ákveðið fyrst hver á að halda hvaða hraða í töflunni hér að neðan. Byrjaðu 10–15 m framan við upphafsstaðinn þannig að þú getir haldið jöfnum hraða þegar þú ert komin(n) fram yfir upphafsstaðinn. Þeir sem eru ekki að hjóla hjálpast að við að taka tímann á þeim sem er að hjóla.

- 2 Færið niðurstöðurnar inn í töflu

Jafn hraði	5 km/klst.	10 km/klst.	15 km/klst.	20 km/klst.
Tími				

- 3 Breytið hraðanum í metra á sekúndu (m/s). Margfaldið hraðann með tímanum í hverjum dálki. Hverju takið þið eftir?
- 4 Teiknið hnitakerfi. Skráið hraðann á x-ásinn og tímann á lóðrétta ásinn.
- 5 Merkið punktana fjóra inn í hnitakerfið. Liggja punktarnir á beinni línu?
- 6 Hugsið ykkur að þið getið skipt yfir í annað samgöngutæki og haldið áfram að auka hraðann. Hvað verður um tímann?
- 7 Getur tíminn nokkurn tímann orðið núll? Rökstyðjið svarið.

Munið að meta skekkjuvalda þegar þið mælið.



Við reiknum miðað við einingu

Í verkefninu á blaðsíðunni hér á undan uppgötvuðuð þið samhengi. Á meðan vegalendin er föst stærð er hraði · tími fasti og samsvarar vegalengdinni. Þegar hraðinn er mikill verður tíminn stuttur. Við segjum að stærðirnar hraði og tími standi í öfugu hlutfalli hvor við aðra.

Samhengið milli tveggja stærða sem standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra má skrifa $y = \frac{k}{x}$, þar sem k er fasti.

Sýnidæmi 6

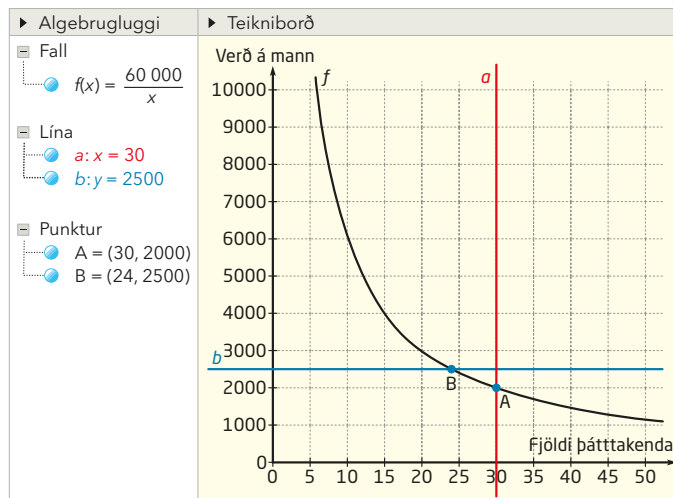
Unglingaklúbbur ætlar í ferðalag. Það kostar 60 000 kr. að leigja rútu og þátttakendur verða að greiða kostnaðinn.

- Settu fram fallstæðu sem sýnir kostnaðinn á mann sem fall af fjölda þátttakenda.
- Teiknaðu graf fallsins í hnitakerfi.
- Sýndu með því að lesa af grafinu hve mikill kostnaðurinn er á mann ef þátttakendur eru 30.
- Sýndu með því að lesa af grafinu hve margir verða minnst að taka þátt svo að útgjöldin verði ekki meiri en 2500 kr. á þátttakanda.

Tillaga að lausn

- Fallstæða: $y = \frac{60\,000}{x}$, þar sem x er fjöldi þátttakenda og y er kostnaður á mann.

- Við notum teikniforrit til að teikna grafið:



Við öfug hlutföll notum við oft y í staðinn fyrir $f(x)$.

Öfugt hlutfall, tvær stærðir, x og y , standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra við aðra ef margfeldið $x \cdot y = k$ þar sem k er fasti.

Breiðbogi, ferill breiðboga greinist í tvo aðskilda óendanlega hlutfæra sem eru spegilmyndir hvor annars; graf öfugs hlutfalls er dæmi um breiðboga.

- c** Við setjum inn beinu línuna $x = 30$ og finnum skurðpunktinn milli grafsins og línunnar. Við merkjum þennan punkt með A . Aflestur í algebruglugganum sýnir:

Með 30 þátttakendum er verið á mann 2000 kr.

- d** Við setjum inn beinu línuna $y = 2500$ og finnum skurðpunktinn milli grafsins og línunnar. Punktinn merkjum við með B . Aflestur í algebruglugganum sýnir:

Það þurfa að vera fleiri en 24 þátttakendur til þess að verið á mann verði lægra en 2500 kr.

4.38 Margrét fær vinkonur í heimsókn og ber fram konfektíkassa með 34 molum.

- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir fjölda mola á mann sem fall af fjölda gesta.
b Teiknaðu graf fallsins og sýndu með aflestri af grafinu hve margir gestir mega vera til að hver og einn fái að minnsta kosti þrjá mola.

4.39 Dagskort í skíðalyftu á skíðasvæði nokkru kostar 1800 kr. fyrir börn og unglinga.

- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir verið á hverja ferð sem fall af fjölda ferða í lyftunni. Teiknaðu graf fallsins í hnitakerfi.
b Hvað kostar hver ferð ef þú nærð 15 ferðum á einum degi?
c Seldar eru stakar lyftuferðir á 400 kr. hver ferð. Hve margar ferðir þarftu að fara minnst á dag til þess að það borgi sig að kaupa dagskort?

4.40 Skólahópur aflar sér tekna með átaksverkefnum. Sveitarfélagið hefur fengið þeim verkefni við að tína upp rusl meðfram ánum í landi þess. Verkefnið telst taka 300 klst.

- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir fjölda vinnustunda á þátttakanda sem fall af fjölda þátttakanda.
b Útskýrðu hvers vegna hópstjórinn telur að fjöldi vinnustunda standi í öfugu hlutfalli við fjölda þátttakanda eingöngu á bilinu 10 til 30 þátttakendur.
c Teiknaðu graf fallsins fyrir $10 \leq x \leq 30$.
d Hópstjórinn vill drífa verkefnið af á tólf klukkustundum. Finndu með aflestri af grafinu hve marga þátttakendur hann þarf að útvega.



Öfug hlutföll í samhengi daglegs lífs

Pegar við notum stærðfræði í daglegu lífi verðum við oft að takmarka formengi fallanna sem nota á sem líkön. Við getum ekki notað neikvæða tölu um fjölda fólks eða hluta. En fallstæðuna sjálfa er hægt að rannsaka með tilliti til allra x -gilda.

Sýnidæmi 7

Við getum valið bæði jákvæð og neikvæð gildi en við getum ekki valið 0.

Við verðum að fá nóg af punktum þétt upp að y -ásnum.

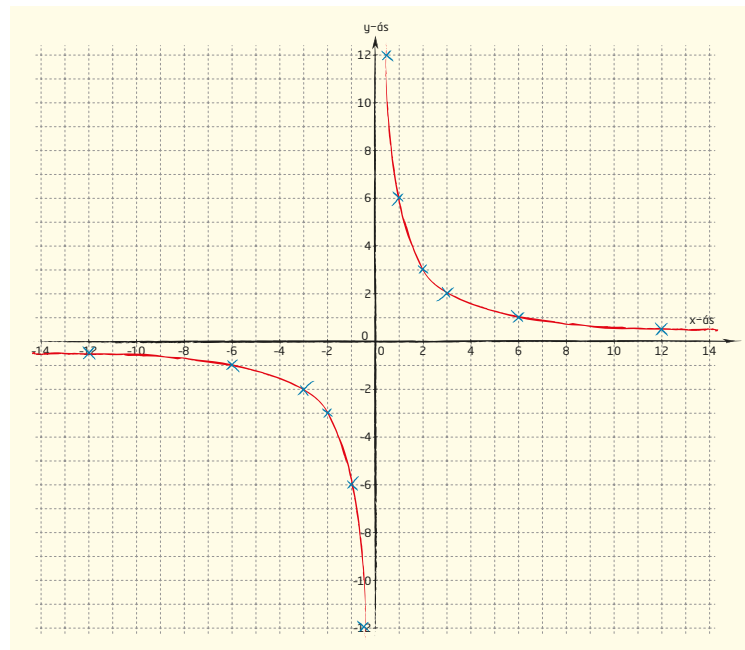
Teiknaðu graf fallsins $y = \frac{6}{x}$ án þess að nota teikniforrit.

Tillaga að lausn

Við sjáum af fallstæðunni að þetta er ekki línulegt fall. Við þurfum því að búa til gildatöflu og reikna út allmarga punkta.

x	-12	-6	-3	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	3	6	12
y	-0,5	-1	-2	-3	-6	-12	12	6	3	2	1	0,5

Við setjum punktana inn í hnitakerfi og teiknum grafið:



- Graf falls sem lýsir öfugu hlutfalli nefnist **breiðbogi**.
- Grafið greinist í tvo hluta.
- x getur ekki tekið gildið 0. Grafið rofnar í $x = 0$.

4.41 Búðu til gildatöflu og teiknaðu gröf fallanna án teikniforrits.

a $y = \frac{24}{x}$

b $y = \frac{2}{x}$

c $y = \frac{-8}{x}$

4.42 Skoðaðu gröfin sem þú teiknaðir í verkefnin hér fyrir ofan og svaraðu spurningunum í a og b.

- a** Hvað verður um gröfin þegar gildum í teljaranum er breytt úr jákvæðum í neikvæð?
- b** Hver er munurinn á gröfunum þegar teljarinn er nálægt 0 og þegar teljarinn er fjær 0?
- c** Notaðu teikniforrit. Búðu til rennistiku a í bilinu frá -10 til 25 . Teiknaðu fallið $y = \frac{a}{x}$. Breyttu gildinu á a og athugaðu hvort svörin við a og b séu í samræmi við öll gröfin.

4.43 Nokkrir unglingar skjóta saman í gjöf sem kostar 36 000 kr.

- a** Búðu til fallstæðu sem sýnir kostnað á mann sem fall af fjölda þeirra sem skjóta saman í gjöfina. Teiknaðu graf fallsins fyrir $1 < x < 20$.
- b** Hver verður kostnaðurinn á mann ef 12 manns skjóta saman?
- c** Hve margir verða minnst að vera með til þess að kostnaður verði undir 5 þúsund krónum á mann?

4.44 Hvaða nemendur hér fyrir neðan lýsa réttu hlutfalli og hverjir lýsa öfugu hlutfalli?

Lýstu réttu hlutfalli eða öfugu hlutfalli.

Þegar x tvöfaldast helmingast y .

A

$x \cdot y$ er fasti.

B

$\frac{x}{y}$ er fasti.

C

Þegar x tvöfaldast þá tvöfaldast y líka.

D



Sýnidæmi 8

Leigubílastöð auglýsir ferðir á flugvöllinn.

Athugaðu hvort verðið á mann stendur í öfugu hlutfalli við fjölda farþega.

Tillaga að lausn

Ef x og y eru stærðir sem standa í öfugu hlutfalli

hvor við aðra þá vitum við að $y = \frac{k}{x}$.

Ef við margföldum með x beggja megin jafnaðarmerkisins sjáum við að það hlýtur að vera til tala k þannig að $k = y \cdot x$.

x	3	4	6	10
y	8800	6600	4400	2640
$y \cdot x$	26400	26400	26400	26400

Við búum til töflu og setjum inn tölurnar.

Við sjáum að $y \cdot x$ er fasti og að hlutfallsfastinn $k = 26\,400$.

Verð á mann stendur í öfugu hlutfalli við fjölda farþega.

Verð á mann	
Prír farþegar	8800 kr.
Fjórir farþegar	6600 kr.
Sex farþegar	4400 kr.
Tíu farþegar	2640 kr.

4.45 Skoðaðu sýnidæmið hér fyrir ofan.

- a** Hvert er verðið sem leigubílastöðin reiknar sér fyrir ferð á flugvöllinn?
- b** Bíllinn sem notaður er til þessara flutninga getur tekið 15 farþega. Hvert verður verðið á mann ef í bílnum eru
 - 8 farþegar
 - 12 farþegar
 - 15 farþegar
- c** Miði með flugrúttunni sömu leið kostar 3600 kr. Hve margir geta ferðast saman til þess að það borgi sig að taka leigubílinn?

4.46 Á plakatinu sérðu verð á klst. fyrir að leigja kanó.

- a** Sýndu að verð á klst. stendur í öfugu hlutfalli við fjölda klukkustunda.
- b** Finndu hlutfallsfastann. Hvernig getum við túlkað hvað hlutfallsfastinn þýðir í þessu tilviki?

Leigðu kanó

Verð á klst.

3 klst. 3000 kr.

5 klst. 1800 kr.

6 klst. 1500 kr.



4.47 Athugaðu hvort samhengið milli x og y í dæmunum hér fyrir neðan lýsir réttu hlutfalli, öfugu hlutfalli eða hvorugu. Finndu fallstæðuna fyrir föllin ef x og y standa í réttu eða öfugu hlutfalli.

a

x	-5	-2	3	8
y	-17,5	-7	10,5	28

d

x	-36	-15	2	90
y	-20	-48	360	8

b

x	-6	-4	7,5	24
y	-20	-13	16	5

e

x	-7	-3	5	32
y	112	48	-80	-512

c

x	1	5	20	100
y	3	11	41	201

f

x	-12	-3	4	18
y	9	36	-27	-6

4.48 Pétur vinnur við uppþvott í mótuneyti. Hann veit að tímakaup hans stendur í öfugu hlutfalli við fjölda klukkustunda sem hann er að þvo upp. Dag nokkurn vinnur hann í fimm og hálfan tíma og reiknar út að tímakaupið sé 1600 kr.

- **a** Hvað fær Pétur í laun fyrir þennan dag?
- **b** Hve snöggur verður hann að vera til þess að tímakaupið verði 2000 kr.?
- **c** Settu fram fallstæðu sem lýsir tímakaupinu sem falli af tíma mældum í klukkustundum. Teiknaðu graf fallsins í hnitakerfi og athugaðu fyrir hvaða gildi á x verði fallið trúverðugt launalíkan.



4.49 Satt eða ósatt?

A

Ummál hrings stendur í réttu hlutfalli við geislann.

B

Ef þú færð 40 000 kr. fyrir verkefni stendur tímakaupið í öfugu hlutfalli við fjölda klukkustunda sem þú notar til að vinna verkefnið.

C

Flatarmál þríhyrnings stendur í öfugu hlutfalli við hæðina þegar grunnlínan er fasti.

E

Þú ert með tvær kökur sem einhver á að skipta í jafna hluta. Hluti köku á mann stendur í öfugu hlutfalli við fjölda fólksins.

F

Verðið á vöru, uppgefið í dollurum, stendur í öfugu hlutfalli við verðið, gefið í krónum svo lengi sem gengið er fast.

D

Flatarmál fernings stendur í réttu hlutfalli við hliðarlengd hans.

Markgildi

Sýnidæmi 9

Markgildi falls er það gildi sem fallgildið nálgast þegar breyta nálgast tiltekið gildi eða stefnir á óendanlegt eða mínus óendanlegt.

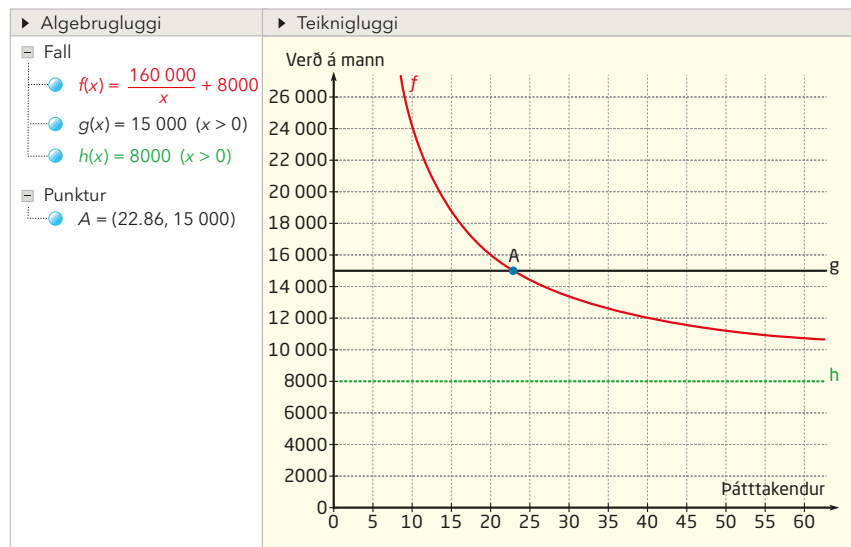
Skátahópur er að skipuleggja ferð. Ferðakostnaðurinn er alls 160 000 kr. og allir verða að greiða 8000 kr. fyrir mat og útbúnað.

Settu fram fall sem segir til um hve mikið hver þátttakandi þarf að greiða. Teiknaðu grafið í hnitakerfi og finndu hve margir verða að vera með ef hver þátttakandi á að greiða minna en 15 000 kr.

Tillaga að lausn

Breytan x táknar fjölda þátttakenda.

$$\text{Fallstæðan: } f(x) = \frac{160\,000}{x} + 8000, x > 0$$



Beina línan $g(x) = 15\,000$ sker $f(x)$ í punktinum A.

Aflestur í algebruglugganum sýnir að x -gildi A er 22,86. Það þýðir:

Minnst 23 þátttakendur þurfa að vera með til þess að verðið verði undir 15 000 kr. á hvern skáta.

Við sjáum í skýringardæmi 9 að verð á mann lækkar eftir því sem fleiri taka þátt en það getur samt aldrei orðið lægra en 8000 sem greiða á fyrir sameiginlegan mat og útbúnað.

Við sjáum að fallgildin nálgast 8000 eftir því sem x stækkar.
 $y = 8000$ er markgildi $f(x)$.

Við teiknum beina línu $y = 8000$ til að sýna hvaða gildi y er að nálgast. Þannig lína kallast lárétt aðfella (eða *láfella*). y -ásinn, $x = 0$, er lóðrétt aðfella (*lóðfella*) þessa falls.

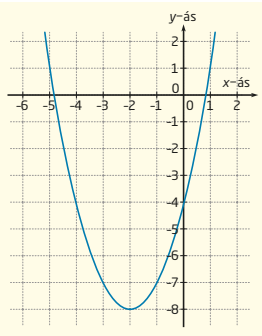
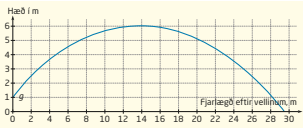
Aðfella, bein lína sem grafið nálgast. Fjarlægðin milli grafsins og línunnar stefnir á 0.

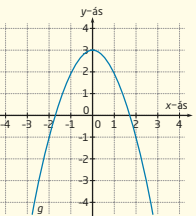
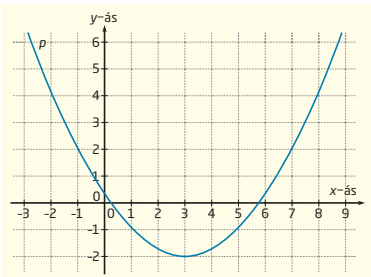


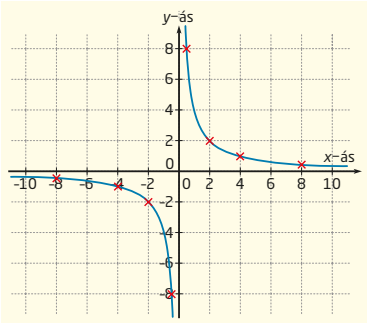
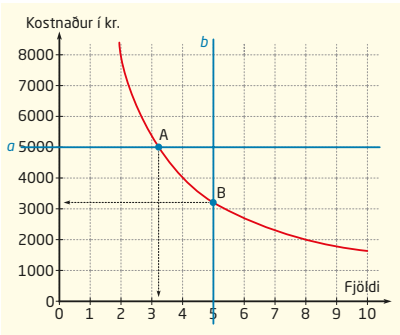
- **4.50** Útskýrðu hvers vegna $f(x) = \frac{160\,000}{x} + 8000$ lýsir ekki öfugu hlutfalli.
- **4.51** Hópur ungmenna ætlar að bóka sig í áheyrnarprufu. Hver og einn fær að minnsta kosti þrjár mínútur til að setja sitt efni fram og að auki er þremur klukkustundum deilt jafnt niður á milli þeirra sem hafa bókað sig.
- Settu fram fallstæðu sem sýnir fjölda mínútna á þátttakanda sem fall af fjölda þátttakenda.
 - Teiknaðu grafið á bilinu $30 < x < 100$.
 - Hve margar mínútur fær hver þátttakandi ef þeir eru 30, og hve margar mínútur fær hver þátttakandi ef þeir eru 100?
 - Hvert er markgildi fallsins? Hvað þýðir það gildi í raunveruleikanum?
- **4.52** 10. bekkur í skóla einum ætlar að halda lokaveislu. Þau leigja sal fyrir 160 000 kr. og plötusnúð fyrir 100 000 kr. Að auki panta þau mat fyrir 3 500 kr. á mann og gos fyrir 300 kr. á mann.
- Settu fram fallstæðu sem lýsir verðinu í þúsundum króna á hvern þátttakanda sem fall af fjölda þátttakenda. Teiknaðu grafið á bilinu $10 < x < 120$.
 - Hvert er markgildi fallsins? Hvað þýðir það gildi í raunveruleikanum?
 - Framkvæmdanefndin ákveður að aflýsa veislunni ef hún verður dýrari en 12 þús. kr. á mann. Hversu margir verða að bóka sig í veisluna?
- 4.53** Notaðu eftirfarandi þrjú föll:
- 1 $f(x) = \frac{4}{x} + 3$ 2 $g(x) = \frac{12}{x} - 6$ 3 $h(x) = \frac{-100}{x} + 25$
- Hver eru markgildi fallanna þegar x verður mjög stór tala?
 - Teiknaðu gröfin í hnitakerfi á bilinu $-20 < x < 20$.
 - Finndu *núllstöðvar* fallanna.

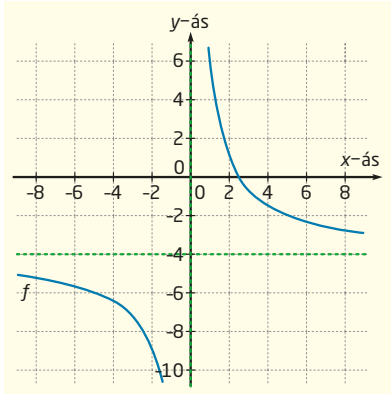
Núllstöð falls er skurðpunktur grafsins við x -ásinn. x -gildið er reiknað með því að leysa jöfnuna $f(x) = 0$. Fallgildið er 0.

Í stuttu máli

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
þekkt annars stigs föll	Hvað föll hér fyrir neðan eru annars stigs föll? a $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2}$ b $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ c $h(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$	a f er annars stigs fall af því að hægt er að umrita það í $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ b g er ekki annars stigs fall af því að x kemur fyrir í nefnaranum. c h er ekki annars stigs fall af því að x^2 kemur fyrir í nefnaranum.
teiknað megindrætti fleygboga út frá fallstæðunni	Skýrðu hvernig graf $f(x) = (x + 2)^2 - 8$ lítur út og teiknaðu megindrætti grafsins.	Graf f er fleygbogi með botnpunkt í $(-2, -8)$. Graf f hefur hliðrast um átta einingar niður og tvær einingar til vinstri miðað við grafið af x^2. Fyrst $f(0) = -4$, sker grafið y-ásinn í $(0, -4)$. Vegna samhverfu er $(-4, -4)$ punktur á grafinu, sem lítur svona út: 
ákvarðað topp- eða botnpunkt fleygboga	a Finndu topppunkt fleygbogans $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ b Sýndu að fallið í a má einnig rita $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ c Bolti fer eftir brautinni sem sýnd er hér fyrir neðan. Hve hátt fer boltinn? 	a Fleygboginn sem táknar f, hefur hliðrast um eina einingu til hægri og tvær einingar upp miðað við x^2. Þar að auki hefur hann speglast um x-ásinn. Þess vegna hefur hann topppunkt í $(1, 2)$. b $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ $= -(x^2 - 2x + 1) + 2$ $= -x^2 + 2x - 1 + 2$ $= -x^2 + 2x + 1$ c Boltinn fer í 6 m hæð yfir völinn.

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
funduð jöfnu annars stigs falls þegar þú þekkir grafið	Finndu jöfnu fleygbogans. 	Fleygboginn hefur topppunkt á y-ásnum svo að graf x^2 hefur hvorki hliðrast til hægri né vinstri, heldur speglast um x-ásinn og flust um 3 einingar upp á við. <u>$f(x) = -x^2 + 3$</u>
lýst hliðrunum fallsins x^2 í $k(x - a)^2 + b$	Fallið f er gefið með $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 2$ Skýrðu hvernig hægt er að líta á graf f sem færslu á grafinu x^2. Teiknaðu megindrætti grafsins.	Graf x^2 hefur hliðrast þrjár einingar til hægri og tvær einingar niður. Ennfremur eru fallgildin fjórðungur af samsvarandi gildum í upphaflega grafinu. 
séð samhengið milli stærða sem standa í réttu hlutfalli og stærða í öfugu hlutfalli	a Hvað einkennir stærðirnar x og y þegar þær standa í réttu hlutfalli hvor við aðra? b Hvað einkennir stærðirnar x og y þegar þær standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra?	a • Þegar x-gildið tvöfaldast þá tvöfaldast y-gildið líka. • Almenna sambandið: $y = k \cdot x$ • $\frac{y}{x}$ er fasti. • Grafið er bein lína gegnum upphafspunkt. b • Þegar x-gildið tvöfaldast þá helmingast y-gildið. • Almenna sambandið: $y = \frac{k}{x}$ • $y \cdot x$ er fasti. • Grafið er breiðbogi og sker aldrei x-ás eða y-ás.

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																				
sett fram öfugt hlutfall á mismunandi hátt	a Gerðu gildatöflu og teiknaðu graf $y = \frac{4}{x}$	a <table><tr><td>x</td><td>-8</td><td>-4</td><td>-2</td><td>-0,5</td></tr><tr><td>y</td><td>-0,5</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-8</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td>0,5</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>8</td><td>2</td><td>1</td><td>0,5</td></tr></table> 	x	-8	-4	-2	-0,5	y	-0,5	-1	-2	-8	x	0,5	2	4	8	y	8	2	1	0,5
x	-8	-4	-2	-0,5																		
y	-0,5	-1	-2	-8																		
x	0,5	2	4	8																		
y	8	2	1	0,5																		
	b Gjöf kostar 16 000 kr. Nokkrir ætla að slá saman í gjöfina. 1 Skrifaðu útgjöld hvers einstaklings (y) sem fall af fjölda (x). 2 Teiknaðu graf fallsins fyrir $2 < x < 10$. 3 Finndu með aflestri hve margir þurfa að vera með til þess að útgjöld hvers og eins verði undir 5000 kr. 4 Finndu með aflestri útgjöld hvers og eins ef fimm slá saman í gjöfina.	b 1 $y = \frac{16000}{x}$ 2  3 Aflestur punktsins A sýnir að það verða að vera fleiri en þrír sem deila með sér kostnaði til þess að útgjöldin verði undir 5000 kr. á mann. 4 Aflestur punktsins B sýnir að þegar 5 deila með sér verða útgjöld hvers og eins 3200 kr.																				

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																				
kannað hvort samhengið milli tveggja stærða er öfugt hlutfall	Finndu hvort gilditaflan sýni að stærðirnar x og y standi í öfugu hlutfalli. <table><tr><td>x</td><td>3</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>y</td><td>20</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	x	3	10	12	y	20	6	5	Við reiknum $y \cdot x$ fyrir hvert talnapar. <table><tr><td>x</td><td>3</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>y</td><td>20</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>$y \cdot x$</td><td>60</td><td>60</td><td>60</td></tr></table> $y \cdot x$ er fasti jafn 60 fyrir öll talnapör. Þá standa stærðirnar x og y í öfugu hlutfalli hvor við aðra.	x	3	10	12	y	20	6	5	$y \cdot x$	60	60	60
x	3	10	12																			
y	20	6	5																			
x	3	10	12																			
y	20	6	5																			
$y \cdot x$	60	60	60																			
funduð markgildi nokkurra falla	a Hvaða markgildi hefur fallið f þegar x nálgast óendanlegt? $f(x) = \frac{10}{x} - 4$ b Teiknaðu graf fallsins með aðfellum.	a Þegar x verður mjög stórt verða gildin á brotaliðnum mjög lítil og nálgast 0. Þá nálgast fallgildið -4. <u>Markgildið er $y = -4$</u> b  Lárétt aðfella (láfella): <u>$y = -4$</u> Lóðrétt aðfella (lóðfella): <u>$x = 0$</u>																				

Bættu þig!

Annars stigs föll

4.54 Gefin er línan $y = -x - 4$.

- a** Finndu hallatölu línunnar.
- b** Ákvarðaðu punktinn þar sem línan sker y -ásinn.
- c** Ákvarðaðu punktinn þar sem línan sker x -ásinn.
- d** Teiknaðu lauslega mynd af línunni í hnitakerfi.

4.55 Gefin er línan $2x + 5y = 10$.

- a** Ákvarðaðu punktinn þar sem línan sker y -ásinn.
- b** Ákvarðaðu punktinn þar sem línan sker x -ásinn.
- c** Finndu hallatölu línunnar.
- d** Teiknaðu meginrætti línunnar í hnitakerfi.

4.56 Hinrik er spjótkestari. Þjálfari hans hefur sett fram stærðfræðilíkan af fullkomnu spjótkesti hjá Hinriki. Hæð kastsins má lýsa með fallinu:

$$f(x) = -0,01x^2 + x + 1,9$$

þar sem x er fjöldi metra mælt út eftir vellinum, og $h(x)$ er hæð spjótsins í metrum yfir vellinum.

- a** Hvað þýðir $h(0)$?
- b** Hve hátt uppi er spjótið þegar það er 30 m frá upphafspunkti?
- c** Notaðu teikniforrit til að teikna graf h .
- d** Hve langt er kastið?
- e** Hve langt frá upphafspunkti er spjótið í hæstu stöðu og hver er hæð þess þá?



4.57 Finndu topp- eða botnpunkta fallanna.

a $f(x) = x^2 + 3$

b $g(x) = -x^2 + 3$

c $h(x) = x^2 - 3$

d $k(x) = -x^2 - 3$

4.58 Finndu topp- eða botnpunkta fallanna.

a $f(x) = (x - 5)^2$

b $g(x) = (x + 5)^2$

c $h(x) = -(x - 5)^2$

d $k(x) = -(x + 5)^2$

4.59 Finndu topp- eða botnpunkta fallanna.

a $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

b $g(x) = (x - 1)^2 - 4$

c $h(x) = -(x + 1)^2 + 4$

d $k(x) = -(x + 1)^2 - 4$

4.60 Finndu topppunkt, hugsanlegan botnpunkt og skurðpunkt við y -ásinn fyrir föllin.

☒ **a** $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

☐ **b** $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$

☐ **c** $f(x) = -\frac{2}{3}(x - 9)^2 + 50$

4.61 Teiknaðu meginrætti grafa fallanna.

a $f(x) = x^2 - 3x$

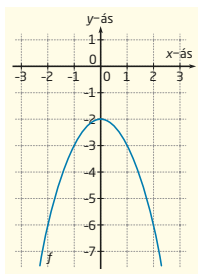
b $g(x) = x^2 - 4$

c $h(x) = 2x^2 - 6x + 1$

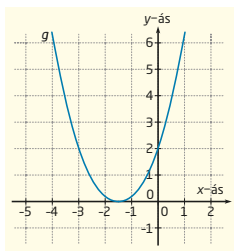
d $k(x) = -x^2 + 2x - 1$

4.62 Finndu fallstæður grafanna.

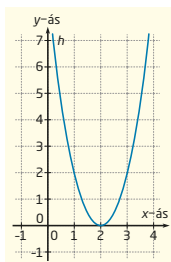
a



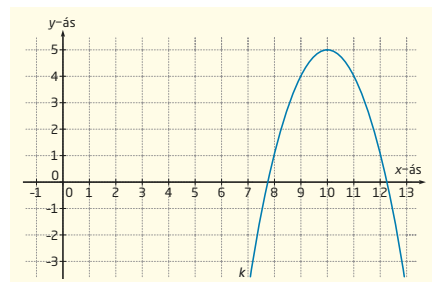
b



c



d





- 4.63** Húbert og Karítas ætla að stofna lítið nemendafyrirtæki til að geta framleitt og selt fuglabretti. Þau þurfa að greiða 10 000 kr. fyrir að nota smíðastofuna á kvöldin á tímabilinu sem fyrirtækið er í rekstri. Efnið í hvert fuglabretti kostar 800 kr. Þar að auki þurfa þau ef til vill að kalla til aðstoðarfólk ef eftirspurnin verður mikil. Þau setja upp fall um kostnaðinn við að framleiða x fuglabretti:

$$k(x) = 2,4x^2 + 800x + 10\,000$$

- Notaðu teikniforrit til að teikna graf k .
- Hve mikið kostar að útbúa 50 fuglabretti?
- Hve mörg fuglabretti er hægt að framleiða fyrir 90 000 kr.?
- Húbert og Karítas selja fuglabrettin á 1300 kr. stykkið. Útskýrðu að tekjur þeirra má setja fram með $t(x) = 1300x$.
- Hve mörg fuglabretti þurfa þau að framleiða og selja til að hafa hagnað af?
- Úskýrðu að hagnaður fyrirtækisins er $t(x) - k(x)$. Settu þetta fall inn í teikniforrit og ákvarðaðu hve mörg fuglabretti Húbert og Karítas verða að framleiða til þess að hagnaðurinn verði eins mikill og mögulegt er.

- 4.64** Þú þarft að nota rúðustrikað blað fyrir þetta verkefni. Þú átt að teikna rétthyrning með ummálið 24 einingar. Láttu eina rúðu hafa lengdina 1 og breiddina 1. Þú skalt fylla inn í töflu eins og þá hér að neðan fyrir hvern rétthyrning sem þú býrð til:

Lengd	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Breidd	11										
Flatarmál	11										

- Notaðu töfluna til að teikna flatarmálið, $F(x)$, sem fall af lengdinni x í hnitakerfi. Hvers konar fall verður það?
- Skoðaðu grafið. Lestu af því stærsta flatarmálið sem rétthyrningurinn getur haft. Hver er lengd og breidd hans þá?
- Hver er breiddin þegar lengdin er x ?
Settu upp fallstæðu fyrir $F(x) = \text{lengd} \cdot \text{breidd}$.
Hvernig er lagið á rétthyrningnum þegar flatarmálið er stærst?
- Notaðu grafið til að skrifa $F(x)$ á forminu $k(x - a)^2 + b$.
Notaðu þetta til að finna stærsta flatarmálið og lengdina og breiddina þegar flatarmálið er stærst.

Öfugt hlutfall

4.65 Skýrðu hugtökin með eigin orðum.

- a Hlutfallsfasti.
- b Breiðbogi.

4.66 Paraðu saman og skráðu hjá þér tilvikin sem talin eru í a–e við rétta gerð falls, 1–5, og settu fram fallstæðu sem sýnir samhengið.

a samhengið milli vikulauna og vinnustunda þegar tímalaunin eru 1700 kr.	1 línulegt samhengi sem lýsir ekki réttu hlutfalli
b samhengið milli verðs á ferð í leigubíl og lengdar ferðarinnar þegar hún kostar 360 kr./km og startgjaldið er 800 kr.	2 annars stigs fall
c samhengið milli hraða og tíma þegar vegalengdin er föst stærð	3 rétt hlutfall
d samhengið milli verðs á mann og fjölda þeirra sem borða pitsu þegar allir eiga að slá saman í fjórar pitsur á 3600 kr. stykkið og greiða 500 kr. hver fyrir sitt gos	4 öfugt hlutfall
e samhengið milli flatarmál hrings og geisla hringsins	5 rætt fall (með breytu í nefnara) en ekki öfugt hlutfall

4.67 Nokkur barnabörn erfa jafn mikið eftir ömmu sína en samanlagt erfa þau 5 200 þús. kr. Settu fram fallstæðu sem lýsir arfshluta sem fall af fjölda barnabarna.

4.68 Matthildur skrifar smásögur fyrir vikublað. Hún fær greiddar 60 000 kr. fyrir hverja smásögu.

- a Útskýrðu að tímakaupið stendur í öfugu hlutfalli við vinnustundirnar sem hún notar til að skrifa smásögu.
- b Settu fram fallstæðu sem sýnir tímakaupið sem fall af fjölda vinnustunda.
- c Hve margar vinnustundir getur hún notað við smásögu ef tímakaupið á að verða hærra en 4000 kr.?
- d Hvert verður tímakaupið ef hún notar 16 vinnustundir við eina smásögu?

4.69 $y = \frac{3}{2x}$. Útskýrðu að stærðirnar x og y standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra. Berðu þetta saman við almenna formið $y = \frac{k}{x}$. Ákvarðaðu k .

4.70 Teiknaðu gröf fallanna.

a $y = \frac{36}{x}$

b $y = \frac{-12}{x}$

c $y = \frac{124}{x}$

4.71 Athugaðu hvort gildatöflurnar sýni öfugt hlutfall. Ákvarðaðu hlutfallsfastann ef hann er til.

a

x	102	306	1224
y	24	8	2

b

x	7	28	56
y	42	8	5

c

x	76	304	912
y	48	12	4

4.72 Teiknaðu föllin tvö

$f(x) = -2x^2 + 4x + 2$ og $g(x) = \frac{4}{x}$ í sama hnitakerfi.

Hver eru hnit skurðpunkta grafanna tveggja?

4.73 Í Tívolí getur þú keypt aksturpassa fyrir 7000 kr. og ekið eins margar ferðir og þú vilt, eða þú getur keypt einstakar ferðir fyrir 500 kr.

- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir verðið á hverja ferð sem fall af fjölda ferða fyrir þátttakanda með aksturpassa.
- b** Hve margar ferðir þarftu að fara til þess að það borgi sig að kaupa aksturpassa?

4.74 Hópur tíundubekkinga leigir sal fyrir 40 þús. kr. og plötusnúð fyrir 70 þús. kr. fyrir lokaveislu. Allir þátttakendur eiga að greiða 4 þús. kr. fyrir mat en annars er sameiginlegum útgjöldum skipt jafnt niður.

- a** Settu fram fallstæðu sem sýnir verð á þátttakanda sem fall af fjölda þátttakanda. Teiknaðu graf fallsins.
- b** Hve margir þátttakendur verða minnst að skrá sig til þess að hver þátttakandi borgi minna en 10 þús. kr.?

4.75 Ferð í leigubíl frá A til B kostar 7000 kr. Leigubíllinn getur tekið allt að tólf farþega.

- a** Notaðu teikniforrit og gerðu grafíska mynd af verði á hvern farþega sem fall af fjölda farþega fyrir hóp frá tveimur til tólf manns.
- b** Fyrir hvaða hópastærðir verður verðið á hvern farþega lægra en 2000 kr.?

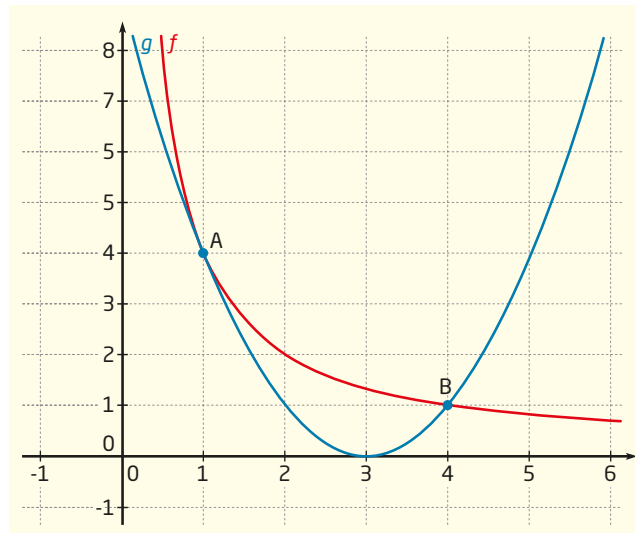


Þjálfaðu hugann

- 4.76** Ég hugsa mér tvær tölur. Önnur er 3 stærri en hin. Summa annars veldis af þeim hvorri fyrir sig er 65.
- a** Settu fram fallstæðu um summu annars veldis af tölunum tveimur.
 - b** Teiknaðu graf af fallinu í a.
 - c** Notaðu grafið til að finna tölurnar tvær.
 - d** Kannaðu hvort svarið í c er rétt með því að reikna út summu annars veldis af tölunum tveimur.

- 4.77** Annað grafið hér fyrir neðan sýnir stærðir sem standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra. Hitt grafið sýnir fleygboga. Gröfin skera hvort annað í A og B.

Settu fram fallstæðu fyrir hvort fallið um sig sem gröfin sýna.



- 4.78** Aníta ætlar að búa til mynstur á púða. Hún hefur teiknað mynstrið hér til hægri.

Ytri málin eru $20 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}$. Aníta er svolítið óviss um breidd bláu randanna en hún vill að flatarmál bláa svæðisins verði jafn stórt samanlögðu flatarmáli hvítu svæðanna.

- a** Láttu x vera breidd bláu randanna. Settu fram fallstæðu $F(x)$ sem sýnir flatarmál bláa svæðisins sem fall af x .
- b** Teiknaðu graf fallsins F í hnitakerfi.
- c** Hve breiðar þurfa bláu rendurnar að vera til þess að bláa svæðið verði jafn stórt og samanlagt flatarmál hvítu svæðanna?





5

Líkindareikningur

Líkindareikningur gæti virst vera stærðfræðilegt leikfang fyrir alla sem hafa áhuga á íþróttum, spilum og leikjum en hann verður mun mun alvarlegri þegar við þurfum að gera áhættumat, senda út aðvaranir um veður og náttúruhamfarir eða velja læknismeðferð.



Stærðfræðiorð

empírísk gögn
herma
dráttur
skila til baka
atburður
andstæður
Vennmynd
krosstafla
líkindatré

Einfaldur skilningur á líkindareikningi getur orðið til þess að við látum síður gabba okkur. Í þessum kafla lítum við bæði á alvarlega og glettna þætti fagsviðsins.

?

Líkurnar á að verða fyrir eldingu eru mjög litlar. Hafi manneskja orðið fyrir eldingu og lifað það af eru líkurnar á að hún verði aftur fyrir eldingu meiri, minni eða jafnmiklar og líkur einhvers sem hefur aldrei orðið fyrir eldingu?

Frá reynslu til líkinda

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- finna líkur út frá tilraunum
- framkvæma einfalda hermun

Fræðilegar líkur má setja fram með

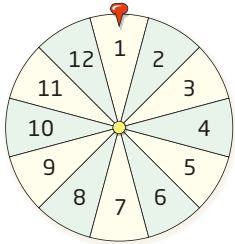
$$P = \frac{\text{fjöldi hagstæðra útkoma}}{\text{fjöldi mögulegra útkoma}}$$

Jafnar líkur,
þar sem allar
útkomur
eru jafn líklegar.

svo framarlega sem um er að ræða *jafnar líkur*.

5.1 Reiknaðu líkurnar á

- að fá tölu sem er minni en 3 þegar teningi er kastað
- að draga laufspil úr spilastokk
- að afmælisdagur einhvers, sem valinn er af handahófi, lendi á sunnudegi þetta árið
- að þú fáið vinning á miða í happdrætti með 5000 miða og 40 vinninga



5.2 Lukkuhjól er með númerin frá 1 til 12. Finndu líkurnar á

- að fá töluna 8
- að fá slétta tölu
- að fá frumtölu
- að fá tölu stærri en 7

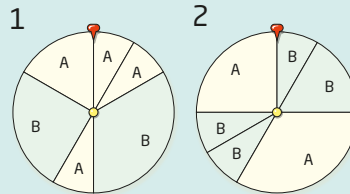
5.3 Þú getur valið um lukkuhjól 1 eða 2. Þú vinnur ef þú færð bókstafinn A á lukkuhjólinu. Hvort lukkuhjólið velur þú?

Það eru meiri
vinningslíkur á
lukkuhjóli 1.

A

Það eru meiri
vinningslíkur á
lukkuhjóli 2.

B



Það eru jafnar
vinningslíkur á
lukkuhjóli 1 og
lukkuhjóli 2.

C



Líkur reiknaðar út frá tilraunum

Ekki er alltaf hægt að reikna fræðilegar líkur. Í staðinn verður að byggja líkinda-reikninginn á reynslu. Ef við höfum ekki reynslu getum við gert tilraun til að afla reynslu. Gögn sem fengin eru með tilraunum eða athugunum á raunveruleikanum eru kölluð *empírísk gögn*.

Sýnidæmi 1

Skólaverkefni í 10. bekk er fólgið í að allir eiga að fara yfir götu við umferðar-ljós á leið til og frá skólanum á hverjum degi. Nemendur eiga að skrá hve mörgum sinnum þeir fá rautt ljós og hve mörgum sinnum grænt ljós. Eftir eina viku hafa þeir fengið þessar niðurstöður:

Rautt	216
Grænt	120

Hve miklar líkur eru á að nemandi fái grænt ljós næst þegar hún eða hann koma að umferðarljósunum?

Tillaga að lausn

Pau hafa fengið grænt ljós 120 sinnum af 336 skiptum:

$$P(\text{grænt}) = \frac{\text{hagstæð}}{\text{möguleg}} = \frac{120}{336} \approx 0,357 = \underline{\underline{35,7\%}}$$

Að reikna líkur á atburði út frá tilraun er eins og að reikna hlutfallslega tíðni atburðarins í tilrauninni.

$$p = \frac{\text{tíðni hagstæðra útkoma}}{\text{heildarfjöldi athugana}}$$

Empírísk gögn eru fengin með tilraunum, reynslu eða með athugun á raunveruleikanum.

5.4 Þú ert með fjögur spil: lauf, tígul, spaða og hjarta.

- Þú stokkar spilin og dregur spil af handahófi. Hverjar eru fræðilegar líkur á hverjum þessara fjögurra möguleika?
- Stokkaðu spilin og dragðu spil af handahófi tuttugu sinnum. Reiknaðu líkur á hverjum möguleika, byggðar á tilrauninni.
- Settu upp sameiginlega niðurstöðutöflu fyrir allan bekkinn. Berðu líkurnar, byggðar á tilrauninni, saman við fræðilegu líkurnar.

Hlutfallstíðni, fjöldi tilvika tiltekins atburðar deilt með heildarfjölda athugana.

Líkur út frá tilraunum samsvara hlutfallslegri tíðni í tilraun. P er tíðni hagstæðra útkoma deilt með heildarfjölda mögulegra útkoma.

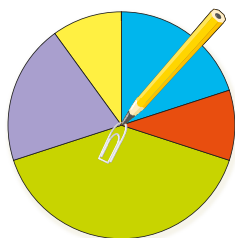
5.5 Þegar teningi er kastað eru fræðilegar líkur á hverri útkomanna sex $\frac{1}{6}$.

- a** Reiknaðu út líkur á hverri útkomu byggðar á tilraun eftir að hafa kastað teningi
- 6 sinnum
 - 20 sinnum
 - 50 sinnum
 - 100 sinnum
- b** Lýstu með eigin orðum hvernig fræðilegar líkur og líkur byggðar á tilraunum líkjast hver annarri eftir því sem tilraununum fjölga.
- c** Hverju er mikilvægt að gæta að þegar þú framkvæmir tilraun til að reikna líkur á atburði?

5.6 Litaðu tíu jafn stóra miða með fjölda mismunandi lita. Til dæmis geta þrír miðar verið rauðir, tveir verið gulir, og fimm geta verið bláir. Haltu fjölda lita sem þú velur leyndum fyrir hinum. Leggðu miðana í ílát.

- a** Láttu annan nemanda í bekknum draga miða og skila honum aftur í ílátið. Láttu draga fimm sinnum og skráðu hvaða litur er á miðanum.
- b** Láttu nemandann giska á hvaða litir eru á öllum miðunum tíu. Ef nemandinn giskar ekki rétt á að draga fimm miða í viðbót og giska aftur á hvaða litir eru á miðunum tíu.
- c** Ræðið hve mörgum sinnum þið þurfið að draga miða til að vera nokkuð viss á litaskiptingunni.

5.7 Notaðu lukkuhjól með fimm reitum. Snúðu bréfklemmu tuttugu sinnum og skráðu niður á hvaða reit hún lendir.



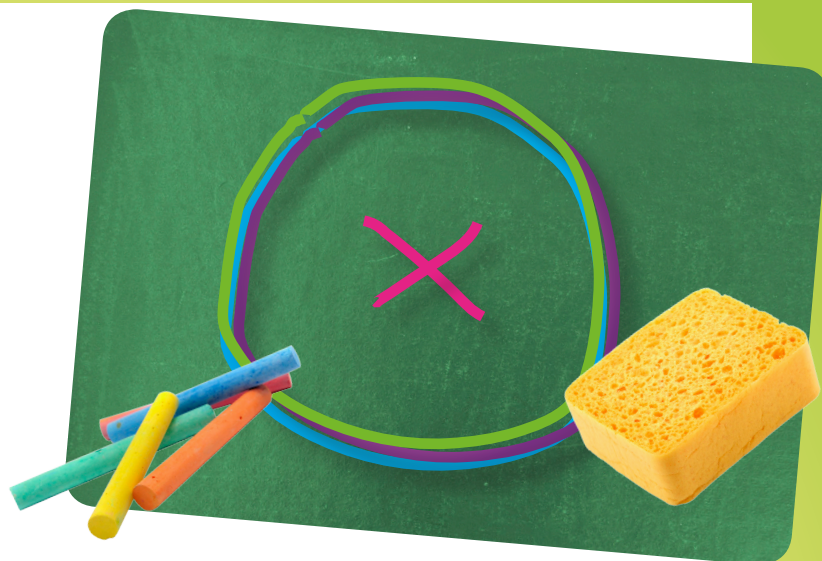
- a** Settu upp töflu og skráðu niðurstöður úr tilraununum tuttugu.
- b** Reiknaðu út líkur á hverjum atburði, byggðar á tilraununum.
- c** Auktu við töfluna, snúðu bréfklemmunni tuttugu sinnum í viðbót og skráðu í töfluna.
- d** Reiknaðu út líkur á hverjum atburði, byggðar á tilraununum fjórtíu.
- e** Skoðaðu lukkuhjólið. Hverjar eru fræðilegar líkur á hverri útkomu?
- f** Berðu saman fræðilegu líkurnar og líkurnar byggðar á tilraununum með mismunandi útkomum í 20 og 40 tilraunum. Ræddu um hver niðurstaðan yrði ef þú gerðir tilraunina 100 sinnum.

Rétthent eða örvhent?

Vinnið í fjögurra eða fimm manna hópum og síðan allur bekkurinn saman.

Þið þurfið

- blautan tennisbolta eða blautan svamp
- töflu
- krít/tússpenna
- blýant
- blað með töflum fyrir niðurstöður



Aðferð

- 1 Teiknið hringlaga feril með 50 cm þvermál á töfluna.
- 2 Takið ykkur stöðu í 4–5 m fjarlægð og kastið boltanum/svampinum fimm sinnum hvert ykkar með *hægri hendi*.
- 3 Skráið hvort þið hittið eða hittið ekki í hringflötinn.
- 4 Takið ykkur stöðu í 4–5 m fjarlægð og kastið boltanum/svampinum fimm sinnum hvert ykkar með *vinstri hendi* og skráið niðurstöðuna.
- 5 Reiknið út líkurnar á hittni hvers nemanda bæði með vinstri og hægri hendi.
- 6 Setjið upp sameiginlega niðurstöðutöflu fyrir allan bekkinn bæði með vinstri og hægri hendi.
- 7 Reiknið út líkur á hittni með vinstri og með hægri hendi fyrir allan bekkinn í einu.

Hve mörg prósent nemenda í bekknum eru líklega örvhentir?

Afbrigði

Kastið baunapoka í húlahring eða fötu.



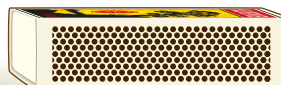
5.8 Lína vinnur við að sendast með pitsur. Pitsu á að afhenda í síðasta lagi einni klst. eftir pöntun en stundum nær hún því ekki. Eina vikuna skráði Lína alls 80 afhendingar og fimm þeirra voru of seinar. Hve miklar líkur eru á því að hún nái að afhenda næstu pitsu innan frestsins?

5.9 Finndu hversu líklegt það er að þú skorir mark í vítakasti í körfubolta. Vinnið saman tvö og tvö. Annað skráir, hitt kastar. Síðan skiptið þið um hlutverk.

- a** Kastaðu tíu sinnum að körfunni og reiknaðu líkurnar á að hitta.
- b** Haltu áfram þar til þú hefur kastað tuttugu sinnum. Finndu þá líkurnar á að hitta.
- c** Haltu enn áfram þar til þú hefur kastað fimmtíu sinnum. Reiknaðu út líkurnar á að hitta.
- d** Breytast líkurnar við fleiri köst? Hver gæti verið skýringin ef líkurnar skyldu breytast?
- e** Berðu niðurstöðurnar saman við niðurstöður námsfélaga þíns. Hvort ykkar ætti að taka vítakast í körfuboltakeppni?

5.10 Þegar við köstum upp eldspýtustokk getur hann lent á þremur ólíkum hliðum. Hverjar eru líkurnar á að kasta stokk þannig að hann lendi með stystu hliðina upp? Kastaðu upp eldspýtustokk og láttu hann snúast í loftinu þannig að hann lendi af handahófi.

- a** Gerðu töflu og skráðu hvernig stokkurinn lendir í tuttugu köstum. Reiknaðu líkurnar á hverri af þremur mögulegum útkomum.
- b** Gerðu tíu tilraunir í viðbót og skráðu áfram í töfluna. Reiknaðu út líkurnar á hverri af þremur mögulegum útkomum.
- c** Gerðu tuttugu tilraunir í viðbót og skráðu áfram í töfluna. Reiknaðu út líkurnar á hverri mögulegri útkomu og segðu til um hvernig líkurnar breytast hugsanlega frá fyrri útreikningum.
- d** Safnið saman niðurstöðum úr öllum köstum í bekknum. Skráið niðurstöðurnar í töflureikni og finnið líkurnar á niðurstöðunum þremur ef köstin eru að minnsta kosti þúsund.



Hermun

Margar tilraunir er erfitt að framkvæma, til dæmis af því að þær eru hættulegar, taka of langan tíma eða eru of dýrar. Ef við vitum eitthvað um líkurnar í tilrauninni getum við útbúið líkan með einföldum hjálpartækjum þannig að við getum framkvæmt tilraunina „í þykjustunni“. Við segjum þá að við *hermum*.

Herma,
gera líkan
af atburði.

Sýnidæmi 2

Notaðu pening til að framkvæma hermun sem getur svarað því hve miklar líkur eru á að það séu *tveir drengir og ein stúlka* í þriggja barna systkinahóp.

Tillaga að lausn

Við látum krónuhliðina tákna stúlku og fiskhliðina tákna dreng. Við köstum þrisvar og skráum niðurstöðuna: DSS. Við setjum þá prik í línuna „Fullnægir ekki kröfunni“ í töflunni.

Við endurtökum tilraunina 50 sinnum og fáum þessa niðurstöðu:

Athugun	Skráning	Tíðni
Fullnægir kröfunni	██ ███ II	12
Fullnægir ekki kröfunni	██ ███ ███ ███ ███ ███ ███ III	38

Fræðilegar líkur á tveimur drengjum og einni stúlku í þriggja systkina hópi eru 37,5%. Getur þú sýnt fram á það?

Talning sýnir að líkurnar á að í þriggja systkina hópi séu tveir drengir og ein stúlka er	
$P(\text{tveir drengir og ein stúlka}) = \frac{12}{50} = 0,24 = \underline{\underline{24\%}}$	

5.11 Ræðið og skýrið hvernig hægt er að nota spil úr spilastokk til að herma eftir röð tíu vítakasta fyrir handboltaleikmann með skorprósentu 75.

5.12 Dag nokkurn fá Lena og Þorbjörn tvisvar sinnum grænt ljós þegar þau ætla að ganga yfir gangbrautirnar tvær á leiðinni í skólann. Það er grænt ljós 30% tímans á báðum umferðarljósunum. Hve miklar líkur eru á að Lena og Þorbjörn fái grænt ljós tvisvar sinnum?

Þú skalt vinna með öðrum nemanda í bekknum og nota rauða og græna miða til að finna svarið.

- a Lýsið hvernig hægt væri að herma eftir umferðarljósunum.
- b Framkvæmið og skráið 50 hermitilraunir.
- c Finnið hve miklar líkur eru á að Lena og Þorbjörn fái grænt ljós á báðum gangbrautunum.



5.13 Langtímaspá um veðrið næstu þrjá daga sýnir að fyrsta daginn eru 70% líkur á rigningu, annan daginn eru 50% líkur á rigningu og þriðja daginn eru 20% líkur á rigningu.

Notaðu þrjú ílát með mismunandi fjölda miða og útbúðu hermun um hvort verði rigning eða ekki næstu þrjá daga.

- a** Lýstu hvernig hægt væri að framkvæma hermunina.
- b** Framkvæmdu og skráðu 50 hermitilraunir í töflu.
- c** Finndu líkurnar á að það verði rigning þrjá daga í röð.
- d** Finndu líkurnar á að það rigni ekki þrjá daga í röð.

5.14 Fræðilegar líkur á að vinna eða tapa í spili eru 50% í hvert skipti.

- a** Útbúðu hermun um að finna líkur, byggðar á tilraun, á að vinna tvö spil í röð. Lýstu hvernig þú framkvæmir tilraunina.
- b** Gerðu 25 hermitilraunir og finndu líkurnar, byggðar á þeim, á að vinna tvö spil í röð.
- c** Útbúðu hermun um að finna líkur, byggðar á tilraun, á að vinna þrjú spil í röð. Lýstu hvernig þú framkvæmir tilraunina.
- d** Gerðu 40 hermitilraunir og finndu líkur, byggðar á þeim, á að vinna þrjú spil í röð.
- e** Útbúðu hermun um að finna líkur, byggðar á tilraun, á að vinna fjögur spil í röð. Lýstu hvernig þú framkvæmir tilraunina.
- f** Gerðu 50 hermitilraunir og finndu líkur, byggðar á þeim, á að vinna fjögur spil í röð.

Hermun: *Steinn, skæri og blað*

Vinnið saman tvö og tvö.

Þið þurfið

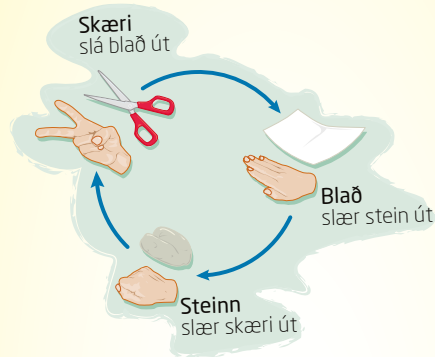
- tvo teninga í mismunandi litum
- blað
- blýant

Aðferð

- 1 Notið tvo teninga í ólíkum litum.
- 2 Ef þið kunnið spila reglurnar skuluð þið fara í punkt 3. Ef þið eruð ekki viss skulið þið lesa og ræða spila reglurnar sem standa til hægri.
- 3 Lýsið hvernig hægt er að herma eftir því hver vinnur í spilu *Steinn, skæri og blað*.
- 4 Útbúið töflu sem sýnir hvort ykkar vinnur og hvenær það er óútkljáð.

Leikmaður 1 vinnur	Óútkljáð	Leikmaður 2 vinnur

- 5 Framkvæmið og skráið 50 hermitilraunir.
- 6 Finnið líkurnar á að það verði óútkljáð.
- 7 Ræðið hvort leikurinn er sanngjarn.



Steinn, skæri og blað er einfaldur leikur til að útkljá minni háttar mál milli fólks. Tvær manneskjur sýna samtímis táknið með hendinni. Ef táknið eru eins er óútkljáð hvor vinnur.

Reglur

„Steinn“: Krepptur hnefi. Steinn slær út skæri og tapar fyrir blaði.

„Skæri“: Vísifingur og langatöng bent lóðrétt upp. Skæri slá út blað og tapar fyrir steini.

„Blað“: Flaturlófi snýr upp eða niður. Blað slær stein út og tapar fyrir skærum.



Töflureiknir getur verið gott hjálpartæki til að herma eftir atburðum. Kosturinn við töflureikni er að hann bæði reiknar hratt og getur höndlað mikið gagnamagn. Töflureiknirinn hefur nokkrar innbyggðar formúlur sem hægt er að nota til að draga af handahófi.

`=RAND()`

Þessi formúla skilar tugabroti á bilinu [0, 1> með slembivali. Við getum margfaldað slembitöluna með heilli tölu til að fá tugabrot á öðru talnabili.

Sýnidæmi 3

Búðu til formúlu sem velur slembitölu á talnabilinu [0, 5>.

Tillaga að lausn

`=RAND()*5`

Sýnidæmi 4

Notaðu töflureikni til að herma eftir því að kasta pening upp 20 sinnum. Teldu hve oft krónan og fiskurinn koma upp.

Tillaga að lausn

Við byrjum á að gefa útkomunum talnagildi:

0 : krónuhlið og 1 : fiskhlið

Við drögum tölu milli 0 og 2 sem við námundum að heiltölu niður á við með því að nota þessa formúlu:

`=INT(RAND()*2)`

Við afritum formúluna á tuttugu hólf.

Til að telja fjölda núlla getum við notað formúluna

`=COUNTIF(svið; skilyrði)`

Töflureiknirinn reiknar upp á nýtt þegar þú ýtir á F9.

	A	B	C	D	E
1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0
4	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1
6					
7	Fjöldi króna	11			
8	Fjöldi fiska	14			

`=COUNTIF(A1:E5;0)`

`=COUNTIF(A1:E5;1)`

5.15 Notaðu tæknina sem sýnd er í Sýnidæmi 4.

- a** Herndu eftir drætti 200 heiltalna á talnabilinu $[0, 5]$. Teldu fjölda fimmanna.
- b** Herndu eftir útkomum 100 kasta með venjulegum teningi. Teldu hve oft hvert gildi kemur upp og settu niðurstöðurnar fram með súluriti.
- c** Herndu eftir útkomum í kynjaskiptingu í 100 hvolpagotum með fjórum hvolpum í hverju goti. Notaðu svarið til að reikna út líkur á því að fá fjóra hvolpa af sama kyni. Berðu niðurstöðuna saman við fræðilegar líkur.

Ef þú leggur 1 við í formúlunni byrjar talnasviðið á 1 í stað 0.



5.16 Notaðu töflureikni til að herma eftir 100 teningaköstum með verpli sem hefur tíu hliðar, merktar 0 til 9. Teldu hve oft þristur kemur upp.

5.17 Notaðu töflureikni.

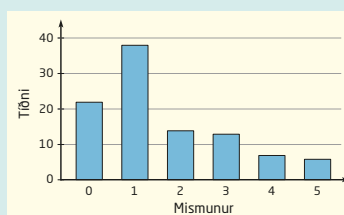
- a** Herndu eftir summunni af því sem kemur upp í tveimur köstum með sex hliða tening.
- b** Settu upp tíðnitöflu sem sýnir tíðni summana í 100 tilraunum eins og í a-lið. Settu niðurstöðurnar fram í súluriti.

5.18 Notaðu töflureikni og gerðu 100 hermitilraunir.

- a** Herndu eftir hve margar stúlkur og hve margir drengir eru í fjölskyldu með sex börn.
- b** Finndu líkurnar á að það séu nákvæmlega þrír drengir og þrjár stúlkur í fjölskyldunni.

5.19 Tveimur tengingum er kastað og mismunurinn á hærri og lægri tölunni er reiknaður. Myndin sýnir niðurstöður hermunar með 100 köstum. Hvaða fullyrðingu ert þú samþykkt(ur)? Rökstyddu svarið.

Hvaða mismun
eru mestar líkur á að fá?



Það eru alltaf mestar líkur á að fá mismuninn 1.

A

Ég held að það séu meiri líkur á að fá mismuninn 2 en 0.

B

Ég held að það sé jafn líklegt að fá mismuninn 0 og 3.

C



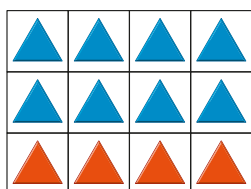
Samsettar líkur, margir atburðir

Markmið

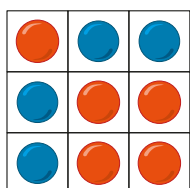
HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna líkur á mörgum atburðum samtímis
- greina á milli dráttar með og án skila
- rannsaka mismunandi spil
- finna líkur á andstæðum atburðum

Á myndabrettunum til vinstri eru annars vegar þríhyrningar og hins vegar hringir. Sumar myndanna eru bláar og aðrar eru rauðar. Við hugsum okkur að þetta séu spil sem við klippum í sundur og leggjum á borð þannig að myndin snúi niður og blöndum vel.



Hópur 1



Hópur 2

Við eigum að finna líkur á að draga tvö blá spil þegar við drögum eitt spil úr hvorum flokki.

Fyrst finnum við líkur á að draga bláan þríhyrning úr flokki 1:

$$P(\text{blár}_1) = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Svo finnum við líkur á að draga bláan hring úr flokki 2:

$$P(\text{blár}_2) = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{4}{9}$$

Til að finna líkurnar á að draga blátt spil úr báðum flokkum þurfum við að margfalda saman þessar tvær niðurstöður:

$$P(\text{blár}_1 \text{ og } \text{blár}_2) = P(\text{blár}_1) \cdot P(\text{blár}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

Margföldunarreglan

Líkurnar á að tveir óháðir atburðir gerist samtímis er margfeldi af líkunum á að hvor atburður um sig eigi sér stað.

$$P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{2}{3} \text{ af } \frac{1}{4} \text{ er } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

Sýnidæmi 5

Óli spilar upp á töluna 13 á tveimur lukkuhjólum. Annað lukkuhjólið er með tölum frá 1 til 50, hitt frá 1 til 25.

- Hverjar eru líkurnar á að vinna á hvoru lukkuhjóli?
- Hverjar eru líkurnar á að Óli vinni á báðum hjólum?

Tillaga að lausn

$$\begin{aligned} \text{a Lukkuhjól 1: } P(\text{vinningur}) &= \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{1}{50} \\ \text{Lukkuhjól 2: } P(\text{vinningur}) &= \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{1}{25} \\ \text{b } P(\text{vinningur á báðum}) &= \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{1250} = 0,0008 = \underline{\underline{0,08\%}} \end{aligned}$$



- 5.20** Það eru 3% líkur á að bók sem þú vilt taka að láni á bókasafninu sé í útláni hjá öðrum. Líkurnar á að DVD-diskur sé í útláni hjá öðrum er 8%. Hverjar eru líkurnar á að hvort tveggja sé í útláni hjá öðrum?

Mundu að
 $3\% = \frac{3}{100}$

- 5.21** Skólabíllinn er að meðaltali meira en 5 mínútum of seinn tvo af fimm skóladögum í viku.

- Hve miklar líkur eru á að skólabíllinn verði of seinn einhvern dag vikunnar?
- Hve miklar líkur eru á að hann verði of seinn þrjá daga í röð?
- Hve miklar líkur eru á að hann verði of seinn fjóra daga í röð?
- Hve miklar líkur eru á að hann verði of seinn fimm daga í röð?

- 5.22** Í hvalaskoðunarferð eru líkur á að sjá hval 0,3 og líkur á að sjá haförn eru 0,8. Líkurnar á að þú verðir sjóveik(ur) eru 0,4.

- Hve miklar líkur eru á að þú sjáir bæði hval og haförn og verðir ekki sjóveik(ur)?
- Hve miklar líkur eru á að þú sjáir ekki hval en að þú sjáir haförn og verðir sjóveik(ur)?
- Útskýrðu hvernig hvalaskoðunarferðin verði að öllum líkindum fyrir flest fólk. Hvaða dýr mun það sjá og hvernig mun fólkinu líða?

Atburður	$P(\text{það gerist})$	$P(\text{það gerist ekki})$
Sjá hval	0,3	0,7
Sjá haförn	0,8	0,2
Verða sjóveik(ur)	0,4	0,6

Að draga með og án skila

Sýnidæmi 6

Dráttur, það sem dregið er af handahófi.

Skil, því er skilað sem hefur áður verið dregið þannig að aðstæður verði eins og fyrir dráttinn.

Háðir atburðir, þegar útkoman í einum atburði er háð útkomunni í hinum atburðunum.

Þú ert með tvö spaðaspil og þrjú hjartaspil. Stokkaðu þau og dragðu án þess að sjá. Finndu líkurnar á að draga spaða tvisvar í röð þegar þú skilar spilin, sem þú dróst fyrst, aftur í bunkann og stokkar upp á nýtt.

Tillaga að lausn

Fyrst finnum við líkurnar á að draga spaða í fyrra skiptið.

$$\text{Atburður 1: } P(\text{spaði}) = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{2}{5}$$

Þar sem aðstæður í seinna skiptið (atburður 2) er alveg þær sömu og í fyrra skiptið eru jafn miklar líkur á að draga aftur spaða. Líkurnar á að draga spaða í bæði skiptin verða

$$P(\text{spaði og spaði}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,16 = \underline{\underline{16\%}}$$

Sýnidæmi 7

Þú ert með tvö spaðaspil og þrjú hjartaspil. Stokkaðu þau og dragðu án þess að sjá. Finndu líkurnar á að draga spaða tvisvar í röð þegar þú skilar ekki spilin sem þú dróst fyrst aftur í bunkann.

Tillaga að lausn

Fyrst finnum við líkurnar á að draga spaða í fyrra skiptið.

$$\text{Atburður 1: } P(\text{spaði}) = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{2}{5}$$

Það er einungis áhugavert að draga aftur ef fyrri atburðurinn á sér stað. Fyrst þú skilaðir ekki spilin, sem þú dróst, þá er einu spili færri að draga úr og einum færri spaðar:

$$\text{Atburður 2: } P(\text{spaði}) = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}} = \frac{1}{4}$$

Líkurnar á að draga spaða í bæði skiptin verða

$$P(\text{spaði og spaði}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = \underline{\underline{10\%}}$$

Í drætti með skilum er atburður 2 óháður atburði 1.
Í drætti án skila er atburður 2 háður atburði 1.

5.23 Ræðið hverjar aðstæðnanna A-D lýsa háðum atburðum og hverjar lýsa óháðum atburðum.

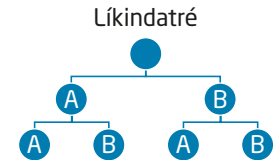
A Þú kastar tveimur teningum og vonast til að fá tvær sexur.

B Þú vonast til að draga þrjá spaða úr einum spilastokk.

C Þú kastar upp peningi þrisvar sinnum og vonast til að fá krónurnar í öll skiptin.

D Þú ert með pakka af svörtum og grænum hálspillum og vilt gleypa græna pillu tvisvar í röð.

Líkindatré, mynd þar sem hver útkoma er einn punktur og strikin tákna hvernig útkomurnar geta átt sér stað hver á eftir annarri með ákveðnum líkum.



5.24 Þrjár kúlur eru í poka, rauð, blá og gul. Þú dregur kúlu og skilar henni þrisvar í röð.

- Búðu til skipulegt yfirlit yfir það hve margar ólíkar litasamsetningar geta komið fram í þremur dráttum. Gott er að nota líkindatré.
- Finndu líkurnar á að fá sama lit í öllum dráttum, gulan, rauðan eða bláan.
- Hve miklar líkur eru á að draga eina kúlu í hverjum lit?



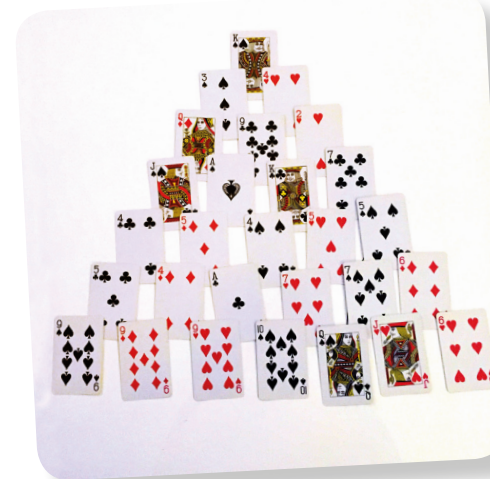
5.25 Þú ert með tvö rauð og fjögur svört spjöld. Hverjar eru líkurnar á að draga tvö rauð spjöld í röð ef fyrri spjaldinu er ekki skilað til baka?

5.26 Í boxi eru sex gular kúlur, þrjár bláar og fjórar rauðar. Þú dregur og skilar ekki kúlunum. Hve miklar líkur eru á að draga

- þrjár gular kúlur hverja á eftir annarri?
- þrjár rauðar kúlur hverja á eftir annarri?

5.27 Þú leggur kapal. Fyrstu fimm spilin eru spaðakóngur, spaðapristur, hjartafjarki, tíguldrottning og laufanía.

- Hve miklar líkur eru á því að þú fáið tvo spaða í röð næst úr spilastokknum?
- Hve miklar líkur eru á því að þú fáið þrjú mannspil í röð næst úr spilastokknum?
- Hve miklar líkur eru á að þú fáið fjóra ása í röð næst úr spilastokknum?



Kasta grís

Spilið hentar fyrir 2–3 leikmenn.
Kastið upp á hver á að byrja.

Þið þurfið

- tening
- blað og blýant

Aðferð

Búið til svona stigmatöflu:

	Leikmaður 1	Leikmaður 2	Leikmaður 3
1. umferð			
2. umferð			
3. umferð			

Leikmaður 1 byrjar og kastar teningnum. Ef hann fær ekki upp 1 getur hann valið um hvort hann vill skrá stigin og gefa leikinn áfram til næsta manns eða kasta aftur og leggja þau stig við. Ef leikmaðurinn fær 1 hverfa öll stigin og leikmaður 2 á leik.

Næsti leikmaður á leik þegar

- leikmaður gefst upp, skráir stigin fyrir umferðina og skilar teningnum áfram
- leikmaður fær 1, verður að skrá 0 stig fyrir umferðina og gefa teninginn áfram

Spilið annaðhvort tíu umferðir eða þangað til leikmaður nær 100 stigum eða eins lengi og kennarinn leyfir. Leggið saman stigin úr öllum umferðum. Leikmaðurinn með flest stig vinnur.



Ræðið

- Hve miklar líkur eru á að fá 1 í kasti?
- Hve miklar líkur eru á að tapa ef leikmaður hættir á að kasta þrisvar upp áður en hann lætur teninginn frá sér?
- Hve mörgum sinnum getur leikmaður kastað teningnum áður en heildarlíkur á að fá 1 verða meiri en 50%?

Afbrigði

Notið tvo teninga. Fylgið sömu reglum en ef leikmaður fær upp 1 á báðum teningum í sama kasti þurrkast öll áður unnin stig út og leikmaðurinn verður að byrja aftur á 0.

Ræðið: Hve líklegt er að fara niður í núll í umferð í þessu spili í samanburði við fyrra spilið?

Andstæðir atburðir

Hugsaðu þér aðstæður þar sem þú mætir á blakæfingu. Öll þau sem eru mætt hafa verið sett í æfingahóp A eða B . Ef hóparnir eru jafnstórir eru jafnmiklar líkur á að lenda í öðrum hvorum hópnum. Við getum þó ekki verið viss um það. Það er bara tvennt sem við getum verið viss um:

Við verðum sett í hóp og við verðum örugglega ekki sett í báða hópana.

Líkurnar á að lenda í hóp A eða B eru þá $100\% = 1$.

Það er að segja $P(A) + P(B) = 1$

Í stærðfræðinni er andstæði atburðurinn við A táknaður með $\bar{A}$.

Þegar atburður er andstæður öðrum atburði, þýðir það að atburðirnir geta ekki átt sér stað samtímis. Stundum sagt að þeir séu fylliatburðir. Til samans fylla þeir allt útkomumengið.

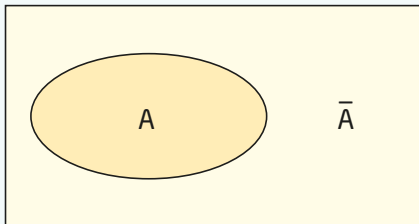
Hér getum við sagt að það að fara í hóp B sé andstætt því að fara í hóp A eða öfugt.



Andstæðir atburðir, atburðir sem til samans eru allir mögulegir atburðir. Summa líkinda á atburðunum er 1.

Atburður A og andstæði atburðurinn $\bar{A}$ skarast ekki og fylla til samans allt útkomumengið.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



Sýnidæmi 8

Markús mætir á handboltaæfingu. Alls eru 28 manns mættir. Þeim er skipt í þrjá hóp. Í hóp A eru átta manns. Hverjar eru líkurnar á að Markús sé í hópi B eða C ?

Tillaga að lausn

$$P(B \text{ eða } C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Líkurnar á að Markús sé í hóp B eða C eru $\frac{5}{7}$

Að vera í hóp B eða C er til samans andstætt því að vera í hóp A .

Sýnidæmi 9

Jóna kastar þremur teningum. Hve miklar líkur eru á að hún fái að minnsta kosti eina sexu?

Tillaga að lausn

Það að fá að minnsta kosti eina sexu er andstæður atburður við að fá ekki neina sexu:

$$P(\text{engin sexa}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0,579 \approx \underline{57,9\%}$$

Andstæðu líkurnar eru:

$$P(\text{að minnsta kosti ein sexa}) = 100\% - 57,9\% = \underline{42,1\%}$$



5.28 Hve miklar líkur eru á

- a** að verða ekki fyrir ból þegar líkurnar á að verða fyrir ból eru 6%?
- b** að ná ekki í strætó þegar líkurnar á að ná í strætó eru 70%?
- c** þurrviðri þegar líkur á rigningu eru 0,8%?
- d** að halda sér vakandi þegar líkur á að sofna yfir sjónvarpinu eru 25%?

5.29 Líkurnar á að fá sexu á teningi eru $\frac{1}{6}$.

- a** Hve miklar líkur eru á að fá ekki sexu í einu kasti?
- b** Hve miklar líkur eru á að fá ekki sexu í tveimur köstum?

5.30 Finndu líkur á andstæða atburðinum við

- a** að fá fiskhlið upp að minnsta kosti einu sinni þegar peningi er kastað þrisvar
- b** að draga að minnsta kosti eitt rautt spil þegar dregið er þrisvar úr spilastokk

5.31 Á heimsvísu eru líkurnar á að vera örvhent(ur) $\frac{1}{10}$.

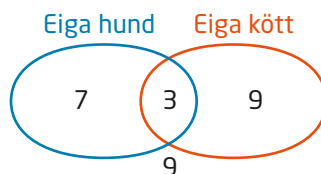
- a** Hve miklar líkur eru á að enginn sé örvhentur í þriggja nemenda hóp?
- b** Hve miklar líkur eru á að einn að minnsta kosti í þriggja nemenda hópi sé örvhentur?
- c** Hve miklar fræðilegar líkur eru á að enginn í þínum bekk sé örvhentur? Kannaðu hvort nokkur sé örvhentur.
- d** Hve miklar fræðilega líkur eru á að einn í bekknum þínum að minnsta kosti sé örvhentur?

Ef tveir atburðir geta átt sér stað samtímis eru þeir ekki andstæðir. Að vera táníngur og vera yngri en 15 ára eru ekki andstæðir atburðir af því að þau sem eru 13 og 14 ára eru í báðum hópum. Oft er heppilegt að raða gögnunum inn í Vennmynd, töflu eða líkindatré til að fá yfirlit yfir marga atburði.

Sýnidæmi 10

Í 28 nemenda bekk eru tíu nemendur sem eiga hund og tólf sem eiga kött. Þrír nemendur eiga bæði hund og kött.

- Hve miklar líkur eru á að nemandi valinn af handahófi eigi hvorki hund né kött?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi valinn af handahófi eigi annaðhvort hund eða kött eða bæði hund og kött?



Tillaga að lausn

Fyrst röðum við gögnunum inn í Vennmynd:

- Við sjáum af myndinni að það eru níu nemendur sem eiga hvorki hund né kött:

$$P(\text{eiga hvorki hund né kött}) = \frac{9}{28}$$

- að eiga að minnsta kosti eitt dýr er andstætt við að eiga hvorugt, hund eða kött:

$$P(\text{eiga hund og/eða kött}) = 1 - \frac{9}{28} = \frac{19}{28}$$

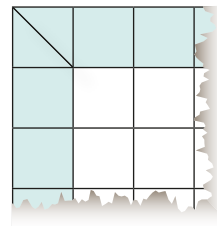
Vennmynd, framsetning atburða með hjálp lokaðra ferla sem hver um sig skilgreinir atburð. Ferlarnir skarast ef atburðirnir geta gerst samtímis.

5.32 Nína, Kristján, Hermann, Brjann og Martha skipuleggja borðtennismót þar sem allir eiga að leika á móti öllum. Allir spila tvisvar við hvern. Þau skipta um hlið eftir fyrsta leik. Notaðu krosstöflu og finndu hve marga leiki þarf að leika alls.

5.33 Tólf nemendur í bekknum læra spænsku sem þriðja erlent tungumál og sex nemendur hafa hjólað í skólann. Níu nemendur læra ekki spænsku og hafa heldur ekki hjólað í skólann. Það eru 23 nemendur í bekknum.

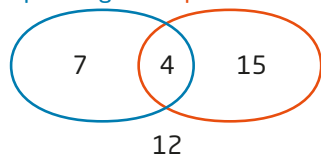
- Teiknaðu Vennmynd sem sýnir aðstæðurnar.
- Útskýrðu myndina fyrir öðrum nemanda í bekknum.
- Hve miklar líkur eru á því að nemandi, valinn af handahófi, hafi hjólað í skólann og læri spænsku?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, læri spænsku en hafi ekki hjólað í skólann?

Krosstafla, tafla yfir marga atburði sem geta komið fyrir í þörum.



5.34 Skoðaðu Vennmyndina til vinstri.

Spilar á gítar Spilar fótbolta



Þegar við notum orðið eða milli tveggja atburða í líkindareikningi þýðir það annaðhvort annan eða hinn eða báða.

- Útskýrðu hvað tölurnar í Vennmyndinni merkja.
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, bæði spili á gítar og spili fótbolta?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, spili á gítar en spili ekki fótbolta?
- Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, spili að minnsta kosti annaðhvort á gítar eða fótbolta?

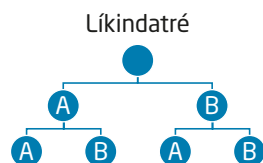
5.35 Þú átt fernar mismunandi buxur (rauðar, bláar, svartar og gráar) og þrjá mismunandi jakka (vindjakka, skinnjakka og regnjakka).

- Settu upp krosstöflu sem sýnir buxurnar og jakkana.
- Hve miklar líkur eru á að þú veljir bláu buxurnar með regnjakkanum ef þú velur alveg af handahófi?
- Hve miklar líkur eru á að þú takir hvorki vindjakkann né svörtu buxurnar?

5.36 Í íþróttafélagi eru 70 félagar. Af þeim eru 20 sem stunda sund og 48 sem stunda fótbolta. 10 félagar stunda bæði fótbolta og sund.

- Settu upplýsingarnar skipulega fram í krosstöflu eða Vennmynd.
- Hve miklar líkur eru á að félagsmaður, sem valinn er af handahófi, stundi sund?
- Hve miklar líkur eru á að félagsmaður, sem valinn er af handahófi, stundi sund en ekki fótbolta?
- Hve miklar líkur eru á að félagsmaður, sem valinn er af handahófi, stundi að minnsta kosti aðra íþróttina, sund eða fótbolta?

5.37 Þú færð að vita að María og Jörundur eigi þrjú börn, 10, 12 og 15 ára. Við gerum ráð fyrir að í hverri fæðingu sé jafn líklegt að eignast stúlku og dreng.



- Settu upplýsingarnar fram með líkindatré.
- Hve miklar líkur eru á að öll börnin séu stúlkur?
- Hve miklar líkur eru á að elsta barnið sé stúlka en hin tvö séu drengir?
- Hve miklar líkur eru á að nákvæmlega tvö barnanna séu drengir?
- Hve miklar líkur eru á að það sé að minnsta kosti ein stúlka í systkinahópnum?

Þrjú einföld spil fyrir tvo

Tveir leikmenn hafa hvor sitt hlutverk.
Látið þann sem á fyrst afmæli vera *A* en hinn er *B*.



Þið þurfið

- tvö rauð og tvö svört spil
- tvo teninga
- tuttugu kubba/spilapeninga
- pening
- blað og blýant

Aðferð

Áður en spilið byrjar skuluð þið ræða hvað þið haldið að komi út. Hvor haldið þið að vinni?

1 Spilað með spilastokk

A á að stokka og halda á spilunum.

B á að draga tvö af spilunum fjórum og skrá stig.

Ef *B* dregur tvö rauð eða tvö svört spil fær hann/hún eitt stig.

Ef *B* dregur eitt rautt og eitt svart spil fer stigið til *A*.

Endurtakið 15 sinnum án þess að skipta um hlutverk. Skilið spilunum í hvert skipti.

Teljið stigin. Sá vinnur sem hefur fengið flest stig. Berið niðurstöðuna saman við niðurstöður hinna paranna í bekknum og teljið hve oft *A* vann og hve oft *B* vann.

2 Spil með peningi

Kastið peningi upp tvisvar sinnum.

Ef niðurstaðan er tvisvar krónuhlið eða tvisvar fiskhlið fer stigið til *A*.

Ef niðurstaðan er ein krónuhlið og ein fiskhlið fer stigið til *B*.

Endurtakið 15 sinnum. Teljið stigin. Sá vinnur sem hefur fengið flest stig.

Berið niðurstöðuna saman við niðurstöður hinna paranna í bekknum og teljið hve oft *A* vann og hve oft *B* vann.

3 Spilað með tveimur teningum

A er leikmaðurinn en *B* er banki. Báðir byrja með tíu spilapeninga. *A* kastar báðum teningunum. Ef *A* fær upp tvær eins tölur vinnur hann þrjá peninga frá bankanum.

Ef *A* fær upp tvær mismunandi tölur verður hann að gefa bankanum einn pening.

Endurtakið án þess að skipta um hlutverk þar til annar leikmaðurinn hefur tapað öllum sínum peningum. Berið niðurstöðuna saman við niðurstöður hinna paranna í bekknum og teljið hve oft *A* vann og hve oft *B* vann.

Þorir þú að taka áhættu?

Tveir leikmenn spila saman.

Þið þurfið

- verpil (tening með sex hliðum eða tíu-verpil)



Aðferð

Kastið verplinum til skiptis. Ákveðið hve margar umferðir þið ætlið að spila.

- 1 Kastið verplinum. Skoðið hvað kemur upp. Þorir þú að taka áhættuna af hvort næsta kast gefur lægra eða hærra gildi?
- 2 Þú getur valið að stoppa eða taka áhættuna. Ef þú tekur áhættuna segir þú „upp“ ef þú heldur að næsta kast gefi sama eða hærra gildi en „niður“ ef þú heldur að næsta kast gefi sama eða lægra gildi.
- 3 Endutaktu „upp“ og „niður“ alveg þangað til þú velur að hætta umferðinni. Teldu hvað köstin eru mörg. Umferðin er búin ef þú giskar rangt.
- 4 Stigin fást þannig:
 - I Þú velur að stoppa: stigafjöldi er fjöldi kasta.
 - II Þú stoppar af því að þú hefur giskað rangt: stigafjöldi er hálfur fjöldi kasta.
- 5 Sá vinnur sem hefur flest stig eftir að bæði hafa spilað þann fjölda umferða sem ákveðið var.

Dæmi um tvær umferðir í spilu:

Leikmaður 1:

Kast nr.	1	2	3	4	5
Upp kom á verpli	4	2	5	5	4
Val	niður	upp	niður	niður	stopp

Leikmaður 1 giskar rétt í öll skiptin en velur að stoppa eftir fimm köst og fær 5 stig.

Leikmaður 2:

Kast nr.	1	2	3	4
Upp kom á verpli	2	2	5	6
Val	upp	upp	niður	tap

Leikmaður 2 giskar rangt í fjórða kasti og fær því bara 2 stig.

Sanngjörn og ósanngjörn spil

5.38 Skoðið spilin á bls. 69 og ræðið.

- a** Eru öll þrjú spilin sanngjörn? Af hverju, af hverju ekki?
- b** Hve miklar líkur eru á að *A* og *B* hvor fyrir sig fái stig í hverju spili? Notið líkindatré eða krosstöflu til útskýringar.
- c** Getið þið breytt reglunum í ósanngjörnu spilunum þannig að þau verði sanngjörn spil? Útskýrið hvernig.

5.39 Veltu fyrir þér spilin *Þú og þú að taka áhættu?*

- a** Með hvaða tölum er alveg öruggt að giska rétt þegar þú notar sex hliða tening?
- b** Hve miklar líkur eru á að þú giskir rétt þegar þú segir „upp“ og ert með 3 á sex hliða tening?
- c** Hve miklar líkur eru á að þú giskir rétt þegar þú segir „niður“ og ert með 5 á sex hliða tening?
- d** Hve miklar líkur eru á að þú giskir rétt í b og c ef þú ert með tíu hliða verpil með tölunum 1–10?

5.40 Veltu fyrir þér spilin *Þú og þú að taka taka áhættu?* þegar þú notar tíu hliða verpil. Við gerum ráð fyrir að þú veljir það sem er líklegast hverju sinni.

- a** Hve miklar líkur eru á að þú giskir rétt í öll skiptin þegar þú færð tölurnar þrjár: 8, 2 og 4?
- b** Hve miklar líkur eru á að þú giskir rétt fimm sinnum í röð ef þú færð eftirtaldar fimm tölur: 7, 3, 8, 2 og 6?

5.41 Marteinn er með venjulegan spilastokk. Hann segir við litla bróður sinn: „Veldu spil. Ef þú velur mannspil færð þú tíu karamellur frá mér, en ef þú dregur eitthvað annað, á ég að fá ...“

Ljúktu við setninguna um hve margar karamellur Marteinn á að fá frá litla bróður sínum til þess að spilið verði sanngjarnt.

5.42 Þið eigið að útbúa borðspil sem æfir ykkur í líkindahugtakinu.

- a** Útbúið spjöld með spurningum fyrir borðspil um líkindi. Skriðið svörin á bakhlið spurningasjaldanna.
- b** Hannið og útbúið borðspilið og reglur sem eiga við spjöldin í spilinu. Spilið spilið.



Í stuttu máli

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
fundid líkur og framkvæmt tilraunir	Í hraðæftirliti eru skráðir 5 bílar sem aka of hratt og 45 bílar sem aka ekki of hratt. Hve miklar líkur eru á að næsti bíll aki ekki of hratt?	$P(\text{ekki of hratt}) =$ $\frac{\text{hagstætt tilvik}}{\text{öll tilvik}} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} = 0,9 = 90\%$
framkvæmt einfalda hermun	Hermdu eftir útkomunni í handboltaleik milli jafngóðra liða með hjálp tenings og með hjálp töflureiknis.	1 Með tening, til dæmis svona: 1–2 samsvarar sigri í heimaleik. 3–4 samsvarar jafntefli. 5–6 samsvarar sigri í útileik. Kastið teningi og skráið útkomuna. 2 Með töflureikni, til dæmis svona: 0 – sigur í heimaleik. 1 – jafntefli. 2 – sigur í útileik. Við notum formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*3)$
reiknað líkur á fleiri en einum atburði	Líkurnar á að það snjóí aðfangadag eru $\frac{2}{5}$, og líkurnar á að aðfangadagur sé á laugardegi er $\frac{1}{7}$. Hve miklar líkur eru á að aðfangadagur eitthvert ár, valið af handahófi, verði laugardagur með snjókomu?	$P(\text{snjór og laugardagur})$ $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{35} = 0,057 = \underline{\underline{5,7\%}}$ <u>Líkurnar á að aðfangadagur eitthvert ár, valið af handahófi, verði laugardagur með snjókomu eru 5,7%</u>
greint á milli dráttar með og án skila	Draga á tvö spil úr spilastokk. Hve miklar líkur eru á að draga tvo spaða hvorn á eftir öðrum?	Ef við skilum fyrsta spilin sem við drógum aftur í stokkinn: $P(\text{tveir spaðar}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $= 0,0625 \approx \underline{\underline{6,3\%}}$ Ef við skilum fyrsta spilin ekki aftur í stokkinn: $P(\text{tveir spaðar}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{125}{2652} = 0,0588 \approx \underline{\underline{5,9\%}}$
reiknað líkur á andstæðum atburðum	Á prófi nokkru fengu sex af 22 nemendum einkunnina 8, 9 eða 10. Hve miklar líkur eru á að nemandi, valinn af handahófi, fái einkunn lægri en 8?	$\frac{6}{22} = \frac{3}{11}$ fengu einkunnina 8, 9 eða 10. Andstæði atburðurinn við að fá 8, 9 eða 10 er að fá ekki 8, 9 eða 10: $P(\text{lægra en 8}) = 1 - \frac{3}{11} = \underline{\underline{\frac{8}{11}}}$

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum																																																	
Ígrundað mismunandi spil	Spilið <i>Max-Min</i> er spil þar sem við giskum á hvaða summa komi upp ef tveimur teningum er kastað. Prír mismunandi möguleikar: 1 Við veljum MAX, þá veðjum við á summu sem er stærri eða jöfn 8. 2 Við veljum MIN, þá veðjum við á summu sem er minni eða jöfn 6. 3 Við veljum SJÖ, þá veðjum við að summan verði 7. Ef þú velur MAX eða MIN og vinnur færð þú eitt stig. Ef þú velur SJÖ og vinnur færð þú 4 stig. Rannsakaðu spilið og finndu út hvort það sé sanngjarnt.	Það er hægt að fá summu útkoma á tveimur ferningum á 36 vegu: <table><tr><td> Teningur 1 Teningur 2 </td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr></table> Það eru 6 útkomur sem gefa SJÖ, 15 útkomur gefa MIN og 15 útkomur gefa MAX. $P(\text{SJÖ}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P(\text{MIN}) = P(\text{MAX}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ Ef það á að vera sanngjarnt að fá fjórfaldan stigafjölda fyrir SJÖ miðað við að fá MIN verður tíðni MIN að vera fjórföld tíðni SJÖ. $\frac{5}{12} : \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{1} = \frac{5}{2} = 2,5$ 2,5 < 4 Sama ígrundun gildir um samanburð á SJÖ og MAX. Niðurstaða <u>Spilið er ekki sanngjarnt. Til lengdar borgar sig að veðja á SJÖ.</u> Önnur tillaga að lausn Við hugsum okkur spil með 12 köstum og að útkomurnar skiptist á fræðilegan hátt. Þá fengjum við fimm sinnum MIN, fimm sinnum MAX og tvisvar SJÖ. • Vinningsleikur MIN gefur 5 stig. • Vinningsleikur MAX gefur 5 stig. • Vinningsleikur SJÖ gefur 8 stig. <u>Spilið er ekki sanngjarnt. Til lengdar borgar sig að veðja á SJÖ.</u>	Teningur 1 Teningur 2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	8	9	4	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11	12
	Teningur 1 Teningur 2	1	2	3	4	5	6																																												
1	2	3	4	5	6	7																																													
2	3	4	5	6	7	8																																													
3	4	5	6	7	8	9																																													
4	5	6	7	8	9	10																																													
5	6	7	8	9	10	11																																													
6	7	8	9	10	11	12																																													

Bættu þig!

Frá reynslu til líkinda

5.43 Í bekk nokkrum eru 18 stúlkur og 12 drengir. Velja á þrjá nemendur til þátttöku í viðburði. Útbúðu hermun með lituðum eldspýtum í bolla, 18 í einum lit og 12 í öðrum.

-  **a** Dragðu tuttugu sinnum þrjár eldspýtur í hvert skipti. Skráðu í töflu hvenær eru dregnir tveir drengir og ein stúlka og hvenær ekki. Finndu líkur, byggðar á tilrauninni, á að nákvæmlega tveir drengir og ein stúlka verði dregin út.
-  **b** Dragðu tuttugu sinnum þrjár eldspýtur í hvert skipti. Finndu líkur, byggðar á tilrauninni, á að þrjár stúlkur eða þrír drengir verði dregin út.
-  **c** Dragðu tuttugu sinnum þrjár eldspýtur í hvert skipti. Finndu líkur, byggðar á tilrauninni, á að enginn eða einn drengur verði dreginn út.

5.44 Takið ykkur stöðu við fjölfarin gatnamót og skráið hve margir ökumenn nota stefnuljós til að gefa til kynna hvert þeir ætli að fara.

- a** Búið til töflu og skráið fjölda bíla þar sem gefin eru stefnuljós þegar 10, 20 og ef til vill 50 bílar hafa farið fram hjá.
- b** Notið gögnin í a til að reikna út líkurnar á að næsti ökumaður noti stefnuljós þegar hann kemur að vegamótum.

5.45

Það er erfitt að spá rétt fyrir um veður. Veðurfræðingar gefa því oft upp hversu áreiðanleg veðurspáin er. Ef veðurkerfin eru óstöðug er veðurspáin oft háð meiri óvissu en ef veðurkerfin eru stöðug. Veðurspárnar hér til vinstri eru merktar með mismunandi litum eftir því hve áreiðanlegar þær eru. Grænar spár eru tiltölulega áreiðanlegar, gular eru ekki eins áreiðanlegar og þær sem eru merktar með rauðu eru síst áreiðanlegar. „Grænar“ veðurspár rætast í yfir 70% tilvika, „gular“ í milli 50% og 70% tilvika og „rauðar“ í færri en 50% tilvika.

Þriðjudagur 21. október 12–18	Miðvikudagur 22. október 14–20	Fimmtudagur 23. október 14–20
		

- a** Priggja daga spá hefur litina grænt, gult og rautt. Finndu mestu og minnstu líkur á að veðurspáin rætist alla þrjá dagana.
- b** Finndu bilið, sem líkurnar liggja innan, fyrir fimm daga langtímaspá með litunum grænt, grænt, gult, gult og rautt.

5.46 „Græn“ veðurspá (sjá dæmi 5.45) rætist í meira en 70% tilvika. Útbúðu hermun með tíu-verpli eða tíu bréfmíðum.

- a Lýstu því hvernig hægt væri að framkvæma hermunina.
- b Framkvæmdu og skráðu tíu hermitilraunir. Hve margar þessara veðurspáa munu líklega rætast?
- c Framkvæmdu hermun þar sem þú átt að finna hve líklegt er að „græn“ veðurspá rætist þrjá daga í röð.

5.47 Settu ruslafötuna í bekkjarstofunni út á gólfíð. Gangið fram saman, tvö og tvö og staðnæmist um það bil 3 m frá ruslafötunni. Vöðlið saman blaði í lítinn bolta og kastið til skiptis í ruslafötuna.

- a Kastið fyrst tíu og síðan tuttugu sinnum. Setjið upp í töflu hvert um sig og skráið hve oft þið hittuð í fötuna.
- b Hvaða líkur, byggðar á þessari tilraun, eru á að þú hittir í ruslafötuna?

5.48 Um það bil 27% norskra kvenna fá krabbamein einhvern tímann í lífinu. Útbúðu hermun um þetta með töflureikni eða með því að nota bréfmíða í mismunandi litum í bolla eða skál.

- a Lýstu því hvernig hermunin virkar.
- b Framkvæmdu og skráðu niður 50 hermitilraunir. Hve margar kvennanna munu líklega fá krabbamein samkvæmt þessu?
- c Um það bil 33% norskra karlmanna fá krabbamein einhvern tímann í lífinu. Hvernig væri hægt að breyta hermuninni í a þannig að nota megí hana fyrir hermitilraunir um karlmenn?

5.49 11% af mannfjöldanum á Íslandi er eldri en 67 ára en 20% eru yngri en 15 ára. Hermdu eftir því að draga út íbúa á Íslandi af handahófi með því að nota töflureikni eða litaða miða. Þú átt að finna líkur á að draga fyrst út íbúa eldri en 67 ára og síðan íbúa yngri en 15 ára.

- a Lýstu því hvernig hægt væri að framkvæma hermunina.
- b Framkvæmdu og skráðu niður 20 hermitilraunir. Hve margir af þessum dráttum gefa þér fyrst íbúa eldri en 67 ára og síðan íbúa yngri en 15 ára?
- c Framkvæmdu hermun þar sem þú átt að finna líkur á að þú dragir út þrjá íbúa yngri en 15 ára hvern á fætur öðrum. Hve marga drætti þarftu þá að framkvæma?



Samsettar líkur, margir atburðir

5.50 Friðrik og Kristján ætla á fótboltaleik í nágrannasveitarfélagi ef foreldrar þeirra samþykkja það og ef það verður ekki rigning. Líkur á rigningu eru 30% og líkur á að foreldrarnir segi nei eru 20%.

Hve miklar líkur eru á að þeir fari á fótboltaleikinn?

5.51 Í ágúst eitt árið voru líkurnar á rigningardegi í Vík í Mýrdal 0,9 og tvo af þrjátíu dögum var hitinn yfir 20 stig.

Hvaða líkur eru á að það hafi verið þurrviðri einn heilan dag og að hitinn hafi jafnframt verið yfir 20 stig?

5.52 Þú átt 100 miða í happdrætti og það eru vinningar á tveimur þeirra.

- a** Hve miklar líkur eru á að draga báða vinningsmiðana hvern á eftir öðrum?
- b** Hve miklar líkur eru á að draga ekki neinn vinningsmiða í tveimur dráttum?



5.53 Í Lúdó eru reglurnar þannig að þú verður rekinn til baka á byrjunarreit ef mótaleikari þinn lendir á reitnum þar sem þú ert með þitt peð. Leikmaður sem fær sexu má kasta aftur.

- a** Hve miklar líkur eru á að leikmaður reki þig á byrjunarreit í næstu umferð ef hans peð er fjórum skrefum fyrir aftan þig?
- b** Hve miklar líkur eru á að leikmaður reki þig á byrjunarreit í næstu umferð ef hans peð er tíu skrefum fyrir aftan þig?



5.54 Þú ert með 10-hliða verpil og 20-hliða verpil. Hvaða líkur eru á að fá 5 upp á báðum verplum í sama kasti?

5.55 Tveir strákar setja upp krabbagildrur. Að meðaltali fá þeir krabba í tvær af fimm gildrum á dag. Líkurnar á að fá humar í gildrurnar eru 0,05.

- a** Hve miklar líkur eru á að fá bæði humar og krabba í gildrurnar einhvern dag, valinn af handahófi?
- b** Hve miklar líkur eru á að fá humar í gildrurnar þrjá daga í röð?

- 5.56 Þú dregur af handahófi tvær kúlur úr poka með færri en tíu kúlum í. Í pokanum er viss fjöldi af gulum og bláum kúlum. Líkurnar á að draga tvær gular kúlur eru sexfaldar líkurnar á að draga tvær bláar kúlur. Þar að auki eru líkurnar á að draga eina kúlu í hvorum lit áttfaldar líkurnar á að draga tvær bláar kúlur.
- Prófaðu þig áfram. Hve margar gular og hve margar bláar kúlur eru í pokanum?
- 5.57 Kennari í bekk með 30 nemendum biður nemendur um að skrifa niður leyfilega tölu milli 1 og 225.
- a Er líklegt eða ólíklegt að allir nemendurnir hafi skrifað mismunandi tölur?
 - b Prófaðu þetta í þínum bekk.
 - c Notaðu töflureikni og útbúðu hermun um þetta efni.
- 5.58 Frægt líkindareikningsdæmi er „afmælisdagadæmið“. Hve margt fólk heldur þú að þurfi að vera í sama herbergi til þess að líkurnar á að tveir eigi sama afmælisdag séu meiri en 50%?
- 5.59 Í Lego-keppni eru tuttugu lið og átta mismunandi verðlaun.
- a Hve miklar líkur eru á að liðið „Sigurvegararnir“ vinni ekki fyrstu verðlaunin sem veitt verða?
 - b Hve miklar líkur eru á að „Sigurvegararnir“ vinni engin verðlaun?
 - c Hve miklar líkur eru á að „Sigurvegararnir“ vinni að minnsta kosti ein verðlaun?





5.60 Þú átt pennaveski með átta mismunandi trélitum. Þú sérð ekki inn í pennaveskið þegar þú dregur út trélit. Eftir að þú ert búin(n) að nota hann skilar þú honum aftur í pennaveskið áður en þú tekur þér nýjan trélit.

- a** Hve miklar líkur eru á að þú dragir rauða trélitinn tvisvar í röð?
- b** Hve miklar líkur eru á að þú dragir fyrst gulan og svo bláan lit?
- c** Hve miklar líkur eru á að draga ekki gula litinn í þremur dráttum í röð?
- d** Hver er andstæði atburðurinn við að draga gula litinn tvisvar í röð? Hve miklar líkur eru á andstæða atburðinum?

5.61 Á landsliðsfundi í fótbolta eru 18 leikmenn valdir úr. Fimm hafa alist upp í Val, þrír í FH, þrír í KR, tveir í Prótti, fjórir í KA og einn í Víkingi.

- a** Það verða 11 leikmenn sem hefja leikinn á vellinum. Hve miklar líkur eru á að báðir leikmennirnir í Prótti verði í byrjunarliðinu?
- b** Hve miklar líkur eru á að hvorugur leikmaðurinn úr Prótti verði í byrjunarliðinu?
- c** Búðu til tvö líkindaverkefni um upplýsingarnar í dæminu. Leystu þitt eigið verkefni og finndu svarið. Fáðu verkefni frá öðrum nemanda og gefðu honum þín verkefni til að leysa.

5.62 Spilið saman tvö og tvö. Skrifið tölurnar frá 1 til 4 á fjóra miða. Snúið miðunum við og dragið tvo miða af handahófi. Annar vinnur ef summan er slétt tala, hinn vinnur ef summan er oddatala.

- a** Er um jafnar líkur að ræða?
- b** Ræddu við annan nemanda í bekknum. Finnið hvaða miða þið getið skipt út til að fá sanngjarnt spil með jöfnum líkum á oddatölu og sléttri tölu.

5.63 Þrjár gular og tvær rauðar kúlur liggja í skál. Þú lokar augunum og dregur tvær kúlur af handahófi.

- a** Hve miklar líkur eru á að draga báðar rauðu kúlurnar?
- b** Útskýrðu hvað sé líklegast að draga: tvær rauðar kúlur, eina kúlu af hvorum lit eða tvær gular kúlur.

5.64 Tíu nemendur eiga möguleika á að vinna í skólakeppni þar sem eru þrír vinningar: 1. vinningur er fótbolti, 2. vinningur er íþróttataska og 3. vinningur er bolur. Dregið er milli nemendanna um vinningana þrjá.

- a** Hve miklar líkur eru á að Lína vinni 1. vinning, Tinna 2. vinning og Ási 3. vinning?
- b** Hve miklar líkur eru á að þessi þrjú vinni hvert sinn vinning?

5.65 Í spilastokk eru 52 spil með 13 spil í hverjum lit: hjarta, tígli, spaða og laufi.

- a** Þú átt að draga fimm spil og hefur þegar dregið tvö lauf. Hve miklar líkur eru á að þú dragir þrjú lauf í viðbót?
- b** Þú hefur þrjú mannspil á hendi: kóng, drottningu og gosa. Hve miklar líkur eru á að þú munir draga tvö mannspil í viðbót?
- c** Besta höndin sem þú getur fengið í póker er háspilaröð. Háspilaröð þýðir að þú ert með fimm hæstu spilin (ás, kóng, drottningu, gosa, tíu) í sama lit, til dæmis í spaða. Þú hefur dregið tvö spil og fengið spaðagosa og spaðadrottningu. Hve miklar líkur eru á að þrjú næstu spil sem þú dregur gefi þér háspilaröð?

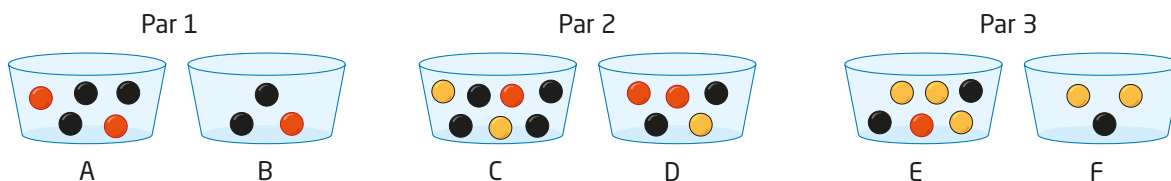


5.66 Strákahópurinn er að borða pitsu en Þór er svolítið seinn. Þegar hann kemur eru hinir búnir að borða en það eru margar pitsusneiðar eftir: þrjár pitsusneiðar með pepperoni, tvær með nautahakki og fjórar með skinku. Þór tekur sneið af handahófi.

- a** Hve miklar líkur eru á að hann taki fyrst sneið með pepperoni og síðan sneið með skinku?
- b** Hve miklar líkur eru á að hann taki fyrst sneið með skinku, svo aðra með skinku og síðast eina með nautahakki?
- c** Þór borðar fjórar pitsusneiðar. Hve miklar líkur eru á að hann af tilviljun borði bara sneiðarnar fjórar með skinku?

Þjálfaðu hugann

5.67 Þú átt að draga kúlur blindandi.



- Veldu í hverju skálapari þá skál sem gefur meiri líkur á að draga svarta kúlu.
- Hve miklar líkur eru á að draga svarta kúlu öll þrjú skiptin ef gefið er að þú veljir þá skál í hverju pari sem gefur meiri líkur á að velja svarta kúlu?

5.68 Raðaðu þessum líkum frá minnstu til mestu:

- fá fjarka upp á teningi tvisvar í röð
- draga spaða úr heilum spilastokk í minnst eitt af þremur skiptum
- fá grænt ljós á gangbraut sem er með rautt ljós 60% tímans
- fá minnst eitt fúlegg af 100 eggjum þegar líkur á að fá fúlegg eru 0,2%

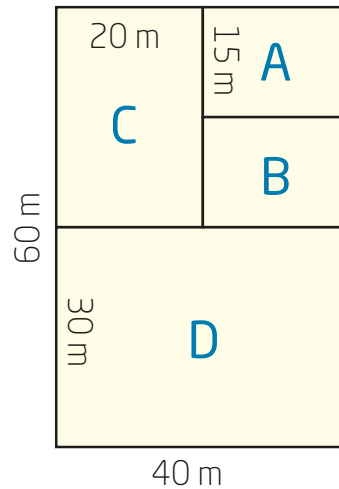
5.69 Lækningafyrirtæki ætlar að útbúa próf á sjaldgæfum sjúkdómi. Vitað er áður að 0,3% fólks er með þennan sjúkdóm. Rannsóknir segja að prófið sýni réttar niðurstöður í 99,2% tilvika. Kona nokkur tekur prófið og fær að vita að hún gengur með sjúkdóminn.

Hvort er líklegra:

- að hún sé raunverulega veik
- að hún sé ekki veik en prófið sýni ranga niðurstöðu

Búðu til kynningu og gefðu lækningafyrirtækinu ráð um hvort það eigi að setja prófið á markað.

- 5.70 Vinnið saman í fjögurra til fimm manna hópum. Á sveitabæ er skipulagt „kúabingó“. Jarðarskika er skipt í nokkra reiti. Áhorfendur geta veðjað á reit og síðan er kú sleppt inn á skikann. Allir bíða spenntir þar til kýrin hefur skilið við sig „kúadellu“. Sá sem hefur veðjað á reitinn fær vinning. Hægt er að endurtaka leikinn með fleiri kúm.



- Útbúðu hermilíkan um hvernig þú getur notað spil úr spilastokk til að herma eftir „kúabingói“ á landskika með mál eins og sýnd eru á myndinni.
- Útbúðu hermilíkan sem lýsir upphæðum sem lagðar eru undir og vinningslíkum á hverjum og einum reit þannig að
 - það verði sanngjarn leikur fyrir alla leikmennina
 - leikstjórnendur geti vænst að halda eftir í hagnað að minnsta kosti 25% þess sem lagt er undir
- Notið spilapeninga fyrir upphæðirnar sem lagðar eru undir og spilin fyrir kýr. Spilið fimm umferðir með fimm leikendum í hverri umferð og metið hvort hermilíkanið í a og b virki eins og áformað var.



Orðskýringar

A	
A-snið	flokkur staðlaðrar pappírsstærðar þar sem hlutfallið milli lengri og styttri hliðar pappírsins er ferningsrótin af 2
aðfella	bein lína sem graf falls nálgast; fjarlægðin milli línunnar og grafsins nálgast 0
afborgun	þegar lán er greitt til baka er lásupphæðinni skipt í minni hluta sem kallast afborganir
algebrísk lausn	samheiti yfir að leysa jöfnur með reikningi, til dæmis með innsetningar- eða samlagningaraðferðinni
andstæðir atburðir (fylliatburðir, fyllimengi atburða)	tiltekinn atburður og andstæður atburður (fylliatburður) hans eru til samans allir mögulegir atburðir. Atburður og andstæður atburður hans geta ekki gerst samtímis. Summa líkinda fyrir atburðinn og andstæðan atburð hans er 1.
annars stigs fall	fall á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$, þar sem a , b og c eru fastar (tölur) og x er breyta; a er ekki 0
annars stigs jafna	jafna á forminu $ax^2 + bx + c = 0$, þar sem a , b og c eru fastar, b og c geta verið 0 en a getur ekki verið 0
B	
botnpunktur	punktur á grafi falls sem hefur lægra fallgildi en allir punktar í nágrenninu, sama og lággildispunktur
bókhald	skráning allra tekna og gjalda á ákveðnu tímabili eftir að tekna hefur verið aflað eða gjöldin greidd; einnig skráning eigna og skulda
breiðbogi	ferill breiðboga greinist í tvo aðskilda óendanlega hlutfæra sem eru spegilmyndir hvor annars; graf öfugs hlutfalls er dæmi um breiðboga
breytipáttur	stærð sem notuð er til að reikna út hve mikið eitthvað hækkar eða lækkar t.d. á ári; breytipátturinn 1,12 merkir 12% aukningu á ári
brotabrot	almennt brot þar sem teljariinn eða nefnarinn eða bæði teljari og nefnari innihalda almenn brot
brúttóflatarmál	flatarmálið í heild áður en einhver hluti af því fer í annað, til dæmis innréttingar
brúttólaun	laun áður en skattur og annar frádráttur er dreginn af
D	
draga með skilum	í líkindareikningi: ef skilað er aftur í poka, kassa eða annað því sem dregið var svo að aðstæðurnar verða eins og þær voru áður en dregið var; þetta kallast að draga með skilum
dráttur	í líkindareikningi: að draga eitthvað af handahófi, t.d. kúlu, spilapening, kubb eða annað úr safni slíkra hluta

E	
eftirmynd	fyrir hvern punkt á eftirmyndinni er samsvarandi punktur á frummyndinni
eins punkts fjarvídd	hefur sjónlínu og einn hvarfpunkt
einslaga	tvær þríhyrningslaga myndir eru einslaga ef þær hafa tvö og tvö horn jafn stór
empírísk gögn	gögn sem eru fengin í tilraunum, úr reynslu af eða athugunum á raunveruleikanum
F	
fallgildi	gildi sem fall fær þegar breyta er sett inn í fallstæðuna; fallgildi er skráð á y-ás þegar graf falls er teiknað
fallstæða	algebrustæða sem lýsir falli
fjarviddarteikning	aðferð til að sýna þrívíðan hlut á tvívíðum fleti þannig að fram komi dýptaráhrif í myndina
fleygbogi	graf annars stigs falls
formengi	mengi allra x-gilda sem fall gildir fyrir
formúlureikningur	að nota formúlu sem jöfnu og leysa hana út frá stærðinni sem finna skal
fyrsta ferningsreglan	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
G	
grafísk lausn á annars stigs jöfnu	aðferð til að leysa jöfnu með því að teikna graf annars stigs falls og finna skurðpunkt grafsins og x-ássins
grafísk lausn á línulegu jöfnuhneppi	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að teikna gröf línulegu jafnanna og finna skurðpunkt þeirra
gullinsnið	þegar skipting striks er þannig að lengri hluti þess stendur í sama hlutfalli við styttri hlutann og strikið í heild stendur við lengri hlutann, hlutfallið er $\approx 1,618$
H	
háðir atburðir	þegar útkoma úr atburði er háð því sem gerist í öðrum atburði
hágildispunktur	punktur sem hefur hærra y-gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
heildargreiðsla lána	summan af afborgunum, vöxtum og gjöldum sem borga þarf vegna láns við hverja afborgun
herma	í líkindareikningi: að búa til líkan af atburði
hlutfall	sjá: rétt hlutfall; öfugt hlutfall;
hlutfallstala kostnaðar	segir til um greiðslur sem standa í réttu hlutfalli við lánsupphæð
hlutfallstíðni	fjöldi athugana á tilteknum atburði deilt með heildarfjölda athugana

hlutfallstölur	x og y eru hlutfallstölur ef þær standa í réttu hlutfalli hvor við aðra; þá er $\frac{y}{x}$ fasti
hvarfpunktur	punkturinn þar sem tvær eða fleiri samsíða línur virðast koma saman í einum og sama punktinum óendanlega langt frá þeim sem horfir
höfuðstóll	fjárhæð sem vextir eru reiknaðir af
I	
inneign	upphæðin sem tilgreind er á bankareikningi
innlánsvextir	vextir af peningum sem liggja á bankareikningi, innlánsvextir eru lægri en útlánsvextir
innsetningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi; þá er fundin stæða fyrir eina breytu í einni jöfnunni og stæðan síðan sett inn fyrir þá breytu í annarri jöfnu
J	
jafnar líkur	í líkindareikningi: þar sem jafnar líkur eru á öllum útkomum
jafngreiðslulán	lán sem er greitt niður með jafn háum greiðslum á hverjum gjalddaga; í byrjun er hluti afborganna lágur og hluti vaxtanna hár en síðan breytist þetta eftir því sem líður á lánstímann
jöfnuhneppi	tvær eða fleiri jöfnur með tveimur eða fleiri breytum
K	
krosstafla	tafla með línum og dálkum, notuð til að hafa yfirlit yfir tvo óháða atburði eða tilraunir
L	
langhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast lengsta hliðin langhlið, langhliðin er mótlæg rétta horninu
lágildispunktur	punktur sem hefur lægra y -gildi en allir aðrir nálægir punktar hægra eða vinstra megin við punktinn
lán með jöfnum afborgunum	lán þar sem greiðslur á afborgunardögum eru breytilegar; afborgunin sjálf er óbreytt en vaxtahlutinn lækkar eftir því sem á lánstímann líður
líður	tala eða algebrustæða sem á að leggja við eða draga frá annarri stæðu; líður eru aðgreindir með plús- eða mínustákni
líkindatré	í líkindareikningi: myndrit þar sem hver útkoma er einn punktur og strik tákna hvernig útkomur verða hver á eftir annarri með ákveðnum líkum
líkur út frá tilraunum	samsvara hlutfallslegri tíðni í tilraun; P er tíðni hagstæðra útkoma deilt með heildarfjölda mögulegra útkoma
línulegt fall	fall á forminu $f(x) = ax + b$ þar sem a og b eru fastar; graf línulegs falls er bein lína

M	
margföldunarreglan í líkindareikningi	líkurnar á að tveir óháðir atburðir verði samtímis eru fundnar með því að margfalda saman líkurnar á hvorum atburði fyrir sig: $P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$
markgildi falls	gildi sem fallgildið nálgast þegar óháða breytan nálgast ákveðið gildi eða stefnir í óendanlegt eða mínus óendanlegt
minnkun	hlutfall; minni tala : stærri tala
minnsta sameiginlega margfeldi	minnsta talan sem allar tölurnar, sem um ræðir hverju sinni, ganga upp í; samnefnari
mælikvarði	hlutfallið milli lengdar á eftirmynd og samsvarandi lengdar á frummynd
N	
nafnvextir	vextir inn- og útlána sem gefnir eru upp hverju sinni án tillits til verðlagsbreytinga
nettólaun	laun eftir að skattar og fleiri frádráttarliðir hafa verið dregnir frá, útborguð laun
núllpunktsreglan	ef margfeldi talna eða algebrustæða er 0 hlýtur að minnsta kosti annar – eða einn – þátturinn að vera 0
núllstöð falls	skurðpunktur grafs falls við x-ásinn; x-gildið er fundið með því að leysa jöfnuna $y = 0$ eða $f(x) = 0$; fallgildið er 0
O	
orlofslaun	greiðslur frá atvinnurekanda sem fólk fær í sumarleyfinu í stað launa; orlofslaunin eru nú (2016) að lágmarki 10,17% af öllum greiddum launum
Ó	
ójafna	inniheldur tvær tölur eða algebrustæður þar sem önnur hefur hærra gildi en hin; þær eru aðskildar með ójöfnumerkjunum $>$ eða $<$
P	
Pýþagórasarregla	Sjá „regla Pýþagórasar“
Pýþagórasarþrennd	þrjár náttúrlegar tölur sem passa inn í reglu Pýþagórasar
R	
regla Pýþagórasar	$\text{langhlið}^2 = \text{skammhlið}_1^2 + \text{skammhlið}_2^2$; í rétthyrndum þríhyrningi er summa lengda skammhliðanna í öðru veldi jöfn lengd langhliðarinnar í öðru veldi
rétt hlutfall	stærðirnar x og y standa í réttu hlutfalli hvor við aðra þegar $\frac{y}{x}$ er fasti, $x \neq 0$
S	
samlagningaraðferðin	aðferð til að leysa jöfnuhneppi með því að leggja saman tvær línulegar jöfnur þannig að önnur óþekkta breytan hverfi

samokareglan	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
skammhlið	í rétthyrndum þríhyrningi kallast styttri hliðarnar tvær skammhliðar, þessar tvær hliðar eru armar rétta hornsins
skattstofn	grunnurinn sem tekjuskattur er reiknaður af eftir að iðgjald í lífeyrissjóð hefur verið dregið af tekjunum
skattur	er innheimtur af launatekjum, hagnaði af atvinnurekstri, vaxtatekjum o.fl. til að fjármagna opinber útgjöld
stækkun	hlutfall; stærri tala : minni tala
T	
talningartré	sams konar og líkindatré; framsetning til að sýna mismunandi samsetningarmöguleika tveggja eða fleiri útkoma
tekjuskattur	skattur af launatekjum; hluti launa sem launþegi þarf að borga til ríkis og sveitarfélaga
topppunktur	punktur á grafi falls sem hefur hærra gildi en allir aðrir punktar í nágreininu; hágildispunktur
tveggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum, eitt hornið snýr að áhorfandanum
Ú	
útlánsvextir	vextir á peninga sem fengnir eru að láni hjá bankanum; útlánsvextir eru hærri en innlánsvextir
útpunktur	samheiti yfir punkta með há- og lággildi í hnitakerfinu
V	
vaxtavextir	vextir af vöxtum fyrri lánstímabíla eða ára
Vennmynd	skýringarmynd þar sem mengi eru teiknuð sem svæði afmörkuð af lokuðum ferlum, notuð til að lýsa innbyrðis afstöðu mengja og aðgerða sem verka á þau
vextir	kostnaður við að taka peninga að láni eða það sem maður fær borgað fyrir að leggja peninga inn í banka
virðisaukaskattur (vsk)	skattur sem er lagður á flestar vörur og þjónustu, kallast oft í daglegu tali vaskur
V	
þáttun	að skrifa tölu eða algebrustæðu sem margfeldi tveggja eða fleiri þátta
þáttur	tala eða algebrustæða sem er margfölduð með öðrum þætti, þættir eru oft aðskildir með margföldunarmerkinu
þriggja punkta fjarvídd	hefur sjónlínu með tveimur hvarfpunktum og þriðja hvarfpunktinn fyrir ofan eða undir sjónlínunni

þrívíddarpunktablað	á þrívíddarpunktablaði er punktunum raðað eins og hornpunktum í jafnhliða þríhyrningum
þrívíður	hlutur sem hægt er að mæla eftir þremur ásum sem standa hornréttir hver á annan
Ö	
öfugt hlutfall	tvær stærðir, x og y , standa í öfugu hlutfalli hvor við aðra ef margfeldi þeirra er $x \cdot y = k$ þar sem k er fasti; þessi tengsl má einnig skrá með $y = \frac{k}{x}$, þar sem x er ekki 0
önnur ferningsreglan	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

TIL NEMANDA

Þessi bók er eign skolans þíns og þú hefur hana að láni. Bækur eru dýrar og því mikilvægt að farið sé vel með þær. Gættu þess vel að skrifa ekki í þessa bók.

[illegible]

- 1) Nafn nemanda skal greinilega skrifað í línurnar hér að ofan.
- 2) Ástandi bókar við útlán og skil skal lýst þannig:
N: ný bók, G: gott, S: sæmilegt, L: lélegt.

SKALI 3B

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Skali býður upp á innihaldsríka og lifandi stærðfræðikennslu.

Nemendur öðlast bæði skilning og færni með því að vera virkir og leitandi þegar þeir vinna við stærðfræði. Nemendur og kennarar nota *Skala* til að lesa stærðfræði, vinna verkefni, rökræða lausnaleiðir og fást við stærðfræðilegar áskoranir á rannsakandi og skapandi hátt. *Skali* vekur áhuga nemenda með því að tengja stærðfræði við daglegt líf og bjóða upp á fjölbreytilega kennslu.

Í *Skala* er lögð áhersla á

- hið faglega innihald, rökrétta uppbyggingu námsefnisins og framvindu námsins
- skýr og nákvæm markmið
- hagnýt dæmi og verkefni
- aðlögun námsefnisins að þörfum allra nemenda í sameiginlegu námssamfélagi þeirra
- nákvæmar leiðbeiningar og stuðning við kennara áður en kennsla hefst, meðan á henni stendur og eftir að henni lýkur

Skali 3 samanstendur af tveimur nemendabókum, tveimur æfingaheftum og tveimur kennarabókum. Kennarabækurnar eru gefnar út á heimasíðu Menntamálastofnunar og þar eru auk þess að finna verkefnahefti, lausnir og annað fylgiefni með flokknum.

Höfundar:

Björnar Alseth

Grete Normann Tofteberg

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Janneke Tangen