



SKALI

1B

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

TIL NEMANDA

Þessi bók er eign skólans þíns og þú hefur hana að láni. Bækur eru dýrar og því mikilvægt að farið sé vel með þær. Gættu þess vel að skrifa ekki í þessa bók.

[illegible]

- 1) Nafn nemanda skal greinilega skrifað í línurnar hér að ofan.
- 2) Ástandi bókar við útlán og skil skal lýst þannig:
N: ný bók, G: gott, S: sæmilegt, L: lélegt.



SKALI

NEMENDABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg • Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen • Bjørnar Alseth

Formáli

Verið velkomin í *Skala 1B*.

Við vonum að ykkur finnist skemmtilegt og krefjandi að læra stærðfræði með þessu námsefni.

- Stærðfræði er nytsamleg í daglegu lífi, bæði hér og nú og þegar þið verðið fullorðin.
- Í stærðfræði eru mynstur og kerfi, í henni eru röksamleg tengsl og hún hefur sitt eigið táknræna tungumál.
- Stærðfræðinám felur í sér gleði, undrun, sigra – og mikla vinnu!
- Í stærðfræðitímum leysið þið dæmi og þrautir, vinnið hagnýt verkefni, spilið spil, rökraðið um lausnir og hugsanagang og notið tölvur og ýmis hjálpargögn.

Hér getið þið séð hvernig nemendabók er byggð upp:

Markmið um hvað þú átt að læra.

Texti til útskýringar.

Hugareikningur, slump-reikningur og blaðreikningur

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna hratt og örugglega í huganum
- reikna með slumpreikningi
- reikna með blaðreikningi

Við hugsum ólíkt og leysum dæmi á mismunandi vegu. Skoðuðu dæmið $8 + 7$. Þótt þetta sé einfalt dæmi er hægt að reikna það á mismunandi vegu.

Sýnidæmi sem sýna þér hvernig þú getur reiknað og skrifað.

Tillögur að lausn

Meðalhæð leikmanna í liði A:

$$\frac{162 + 176 + 156 + 177 + 174 + 172 + 175 + 162}{8} = \frac{1351}{8} \approx 169$$

Meðalhæð leikmanna í liði B:

$$\frac{176 + 172 + 164 + 180 + 168 + 173 + 168}{7} = \frac{1201}{7} \approx 172$$

Meðalhæð leikmanna í liði B er hærri.

Hildur

Það er skíðaskytta A. Hann hitti oftast.

Björn

Það er skíðaskytta B. Hann hefur bara misst marks 6 sinnum.

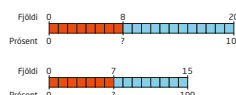
Atli

Þeir hafa jafn mikla möguleika. Annaðhvort hitti þeir eða þeir missa marks. Möguleikarnir eru 50–50.

- 4.10** Skíðaskytta A hefur í fyrri keppnum hitt í mark í 30 af 50 skotum en skíðaskytta B hitti í mark í 26 af 32 skotum. Hvor þeirra á meiri möguleika á að hitti í mark í næsta skoti?
Hver eða hverjir af nemendum hafa rétt fyrir sér? Ræddu um þetta við bekkjarfélagá þinn.

- 4.11** Í fyrirtækinu „Saumastofunni“ vinna 8 konur og 12 karlar. Í fyrirtækinu „Smíðastofunni“ vinna 7 konur og 8 karlar.

- Búðu til tilnítöflur sem sýna tíðni og hlutfallstíðni kvenna og karla í hvoru fyrirtæki.
- Í hvoru fyrirtækinu er hlutfallstíðni kvenna hærri?
- Leggðu saman hlutfallstíðnina í „Saumastofunni“.
- Hver heldurðu að summa hlutfallstíðninnar í „Smíðastofunni“ sé? Athugaðu hvort tilgáta þín er rétt.



Verkefni til umræðu.

Myndir sem hjálpa þér að skilja.

Misþung verkefni.

- 4.37** Tíu nemendur ákveða að byrja að safna frímerkjum. Eftir mánuð báru þeir sig saman og þá kom í ljós að þeir áttu svona mörg frímerki:

55 – 60 – 95 – 65 – 50 – 50 – 65 – 85 – 55 – 75

- Hve mörg frímerki áttu nemendurnir tíu samtals?
- Hve mörg frímerki áttu nemendurnir tíu að meðaltali?
- Hve margir nemendanna áttu fleiri frímerki en meðaltalið sagði til um?

- 4.38** Hitastigið var mælt á hverjum degi kl. 12:00.

- Í fimm daga mældist hitinn 2°C , 3°C , 6°C , 9°C og 5°C . Finndu meðalhitann.
- Eina vikuna mældist hitinn þessi: 6°C , 3°C , -4°C , 0°C , 3°C , -3°C og 2°C . Finndu meðalhitann.
- Eina vikuna mældist hitinn þessi: 2°C , $3,5^{\circ}\text{C}$, -5°C , 0°C , $2,5^{\circ}\text{C}$, $-6,5^{\circ}\text{C}$ og 0°C . Finndu meðalhitann.

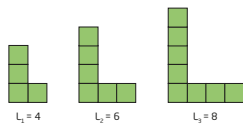
Upprifjun á markmiðum til að ganga út frá við vinnuna fram undan.

Til að æfa meira það sem þú þarft.

Bættu þig!

Að kanna mynstur

5.89 Finndu mynstur sem sýnir hve margir reitir eru í hverri mynd.



- Finndu L_4 það er að segja hve margir reitir eru í mynd 4. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- Finndu L_5 það er að segja hve margir reitir eru í mynd 5. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- Finndu L_6 það er að segja hve margir reitir eru í mynd 6. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- Skrifaðu með orðum hve margir reitir eru í næstu mynd.
- Gefið er að $L_{10} = 42$. Notaðu uppgötvun þína í d-löb til að finna L_n .
- Skrifaðu með orðum hve margir reitir eru í mynd númer n , það er að segja L_n þegar þú veist hve margir reitir eru í næstu mynd á undan, þ.e. L_{n-1} .
- Finndu L_{100} án þess að reikna út myndtölurnar fyrir framan.
- Láttu n tákna hvaða myndnúmer sem er og búðu til formúlu fyrir Notaðu formúluna til að finna L_{100} .
- Hvaða númer hefur stærsta myndin sem þú getur búið til með 80 reitum?

122 Skali 1B

Í stuttu máli

Í algebra reiknum við með staðum sem geta innihaldið bæði bókstafi, tölur og aðgerðarták. Bókstafirnir tákna tölur og á að meðhöndla eins og tölur. Tölur, sem bókstafirnir tákna, eru óþekktar og kallast breytur.

Þú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
borið kennsl á mynstur mynda og talna	Hvers konar mynstur er þetta?  1 4 9 16	Mynstrið er búið til með ferningum þar sem hliðarlengdirnar eru 1, 2, 3 og 4. Tölur eru fjórar fyrstu ferningstölur.
haldið áfram með mynstur	Hver er næsta tala? 2, 3, 6, 11, 18, ...	Mismunur milli talnanna er 1, 3, 5 og 7. Mismunur milli 18 og næstu tölur er 9. Næsta tala er $18 + 9 = 27$
ótskipt með orðum, formúlum og táknum hvernig mynstur er byggt upp. Þú getur notað bókstafi til að búa til formúlur sem lýsir mynstri. Þegar þú átt að finna ákveðið talnamyndstúr skaltu	 Mynd 1 Mynd 2 Mynd 3 Finndu myndtölur myndanna.	Myndtölur eru $m_1 = 4$, $m_2 = 7$ og $m_3 = 10$

Þjálfaðu hugann

- 4.84 Í bekkjardeild nokkurri eru 20 nemendur. Niu af þeim eiga systur og 10 af þeim eiga bróður. Fimm nemendanna eiga engin systkini. Hve margir þeirra eiga bæði bróður og systur?

- 4.85 Talfan til hægri sýnir tíma þeirra fimm bestu í hlaupi stúlkna. Áðrir þátttakendur en þær fimm bestu fengu viðurkenningu ef hlaupahraði þeirra var undir tímamörkum sem voru fundin með því að bæta 25% við meðaltíma hinna fimm bestu.

Hve hratt þurftu þátttakendur að hlaupa til að fá viðurkenningu?

Tími
1. klst. 24 mín. 12 sek.
1. klst. 25 mín. 10 sek.
1. klst. 26 mín. 8 sek.
1. klst. 30 mín. 53 sek.
1. klst. 33 mín. 37 sek.



- 4.85 Þann 1. júní 2011 var meðalaldur 33 kennara í skóla nokkrum 47 ár. Þann 31. maí 2012 hættu brír kennarar, sem voru 65 ára, 58 ára og 62 ára. Í staðinn voru strax ráðnir fjórir nýir kennarar en þeir voru 24 ára, 31 ár, 26 ára og 28 ára.

Hver var meðalaldur kennara í þessum skóla þann 1. júní 2012? Námundaðu meðalaldurinn að næsta heila ári.

Kafli 4 • Tilfræði 63

Gangi ykkur vel í stærðfræði!

Með kveðju frá höfundum

Efnisyfirlit

Formáli. 2

4 Tölfræði. 6

Framsetning niðurstaðna 8

 Hlutfallstíðni 12

 Hlutfallstíðni með töflureikni 14

 Skífurit 17

 Línurit 22

 Tröppurit 24

 Flokkaskipt gögn 26

 Fjarlægð milli heimilis og skóla 28

 Gagnasöfn 29

Greining og útreikningar 30

 Meðaltal 30

 Miðgildi 32

 Tíðasta gildi 34

 Í langri halarófu 35

 Miðsækni í töflureikni 37

 Dreifing 38

 Dreifing í töflureikni 40

 Skutlukeppni 41

 Meðaltal 30 ára tímabils 42

Tölfræðilegar kannanir 44

 Gagnasöfnun 45

 Spurningakönnun 46

 Kynning niðurstaðna 48

 Heimildir með villandi upplýsingum. 49

 Blekkingar með tölfræði. 50

Í stuttu máli 52

Bættu þig! 58

 Kynning á niðurstöðum 58

 Greining og útreikningar 60

 Tölfræðilegar kannanir 62

Þjálfðu hugann 63

5 Algebra og jöfnur 64

Að rannsaka mynstur. 66

 Mismunandi formúlur fyrir

 sama mynstur 71

 Myndtölur. 73

 Beinar formúlur og rakningarformúlur 74

Algebrustæður 78

 Gildi algebrustæðna 84

 Algebruspil. 87

Bókstafareikningur 88

 Að draga saman líka liði 88

 Stæður með sviga 96

Jöfnur 106

 Texta breytt í jöfnu og jöfnu í orð 107

 Að leysa jöfnu með útreikningi 109

 Óuppsettar jöfnur 115

Í stuttu máli 118

Bættu þig! 122

 Að kanna mynstur 122

 Algebrustæður 124

 Jöfnur 127

Þjálfðu hugann 129

Orðskýringar. 131





Tölfræði

Tölfræði fjallar um að skipuleggja kannanir, safna upplýsingum, flokka þær og túlka það sem kemur í ljós. Tölfræði er notuð í fjölmiðlum á hverjum degi, í dagblöðum, sjónvarpi og á netinu.

Stærðfræðiorð

tafla
myndrit
tíðni
meðaltal
tíðasta gildi
miðgildi
spönn



?

Í fjórum fótoltaleikjum voru skoruð 3 mörk að meðaltali, miðgildi er 2,5 mörk. Það er ekkert tíðasta gildi.

Hvað geta mörkin í hverjum þessara leikja hafa verið mörg? Geturðu fundið fleiri en eina lausn?

Framsetning niðurstaðna

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- flokka gögn og búa til tíðnitöflur
- setja fram gögn í súlu- eða stuðlariti, skífuriti, línuriti og tröppuriti
- finna hlutfallstíðni
- nota gagnabanka til að sækja ákveðnar upplýsingar

Gögn eru safn talna eða annarra upplýsinga.

Breyta er stærð eða einkenni í gögnum, sem eru til rannsóknar, og getur tekið mismunandi gildi.

Tíðnitafla sýnir yfirlit yfir hve oft ákveðin gildi á breytu koma fyrir.

Pegar þú hefur í höndunum *gögn* með mismunandi gildum þarftu að flokka þau til að fá yfirlit yfir þau. Gögnin – eða upplýsingarnar – geta falið í sér texta (nöfn, liti o.s.frv.) eða tölur (hitastig, þyngd, einkunnir o.s.frv.).

4.1 Markús kannar hvaða námsgrein bekkjarfélögum hans finnst skemmtilegust.

Hann skrifar jafnóðum svörin sem hann fær.

ípr., enska, ípr., stæ., list- og verk., ípr., stæ., tónm., samf., ípr., enska, stæ., samf., samf., nátt., ípr., stæ., list- og verk., nátt., list- og verk., ípr., stæ., ísl., samf., stæ., ípr., samf., enska

Til að fá betri yfirsýn yfir svörin gerir Markús *tíðnitöflu*.

Námsgrein	Talning	Tíðni
ípróttir (ípr.)	III II	7
list- og verkgreinar (list- og verk.)		
stærðfræði (stæ.)		
enska (enska)		
íslenska (ísl.)		
samfélagsgreinar (samf.)		
tónmennt (tónm.)		
náttúrugreinar (nátt.)		

- Skrifaðu töfluna upp og ljúktu við hana.
- Hve margir nemendur eru í bekkjardeild Markúsar?
- Hvaða námsgrein er vinsælust?

4.2 Gerðu yfirlit yfir hvaða fög bekkjarfélögum þínum finnst skemmtilegust.

4.3 Eftir keppni í sjóstangaveiði kom í ljós að fjöldi fiska, sem veiðimenn veiddu, var eftirfarandi:

0, 1, 0, 3, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 2,
3, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 0, 4, 2, 0, 0

- a Hve margir þátttakendur voru í keppninni?
- b Búðu til tíðnitöflu sem sýnir hve margir þátttakendur fengu 0, 1, 2, 3 eða 4 fiska.
- c Hve marga fiska fengu þátttakendur samtals?



Oft eru notuð súlurit til að bera saman tíðni. Súlurit er teiknað í hnitakerfi og samanstendur af súlum sem eru jafn breiðar. Milli súlnanna eru bil. Hæðin á þeim sýnir tíðni eða fjölda.



4.4 Bekkjardeild nokkur kannar hve marga farsíma nemendurnir hafa átt. Niðurstöður eru þessar:

2, 1, 4, 0, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 5, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 2, 0

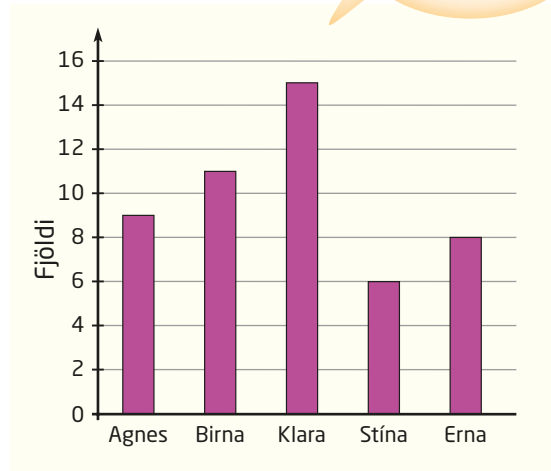
- a Gerðu tíðnitöflu sem sýnir hve margir nemendur hafa átt 0, 1, 2, 3, 4 og 5 farsíma.
- b Gerðu súlurit út frá upplýsingunum í tíðnitöflunni.
- c Hvaða fjöldi farsíma er algengastur?
- d Hve margir nemendur hafa átt fleiri en einn síma?

4.5 Fimm stelpur selja kökubox fyrir handboltalið sitt. Súluritið sýnir hve mörg box hver þeirra selur.

- a Hve mörg box selur Stína?
- b Hver stelpnanna selur 8 box?

Tvær stelpnanna selja samtals jafn mörg box og sú sem selur flest box.

- c Hvaða tvær stelpur eru það?



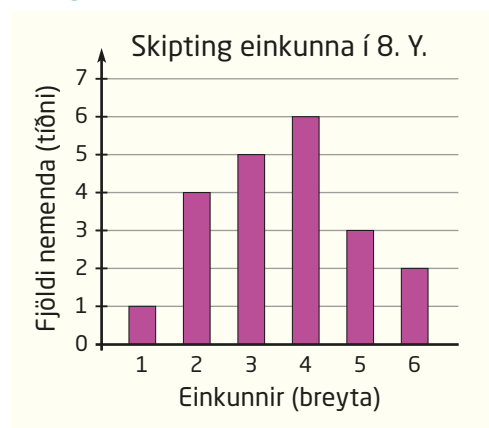
Sýnidæmi 1

Tíðnitaflan til hægri sýnir skiptingu einkunna úr stærðfræðiprófi í 8. Y. þar sem einkunnaskalinn er 0 til 6.

Búðu til súlurit sem sýnir skiptingu einkunnanna í 8. Y.

	A	B
1	Einkunnir	Fjöldi nemenda
2	1	1
3	2	4
4	3	5
5	4	6
6	5	3
7	6	2
8		

Tillögur að lausn



Hægt er að búa til súlurit með töflureikni. Þá er notaður flipinn „Insert“ sem er á verkfærastiku töflureiknisins. Margar tegundir myndrita eru mögulegar, framsetning þeirra getur verið ólík og breyta má útliti til að búa til skýr og skilmerkileg myndrit.

4.6 Notaðu töflureikni og búðu til súlurit yfir tíðnitöflurnar í verkefnum 4.1 og 4.3.

4.7 Þetta er yfirlit yfir einkunnir í 8. X.

4, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 4, 5, 3, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 3, 6, 4, 4, 5, 3, 2, 6, 3, 3

a Búðu til tíðnitöflu sem sýnir hvernig einkunnirnar dreifast.

b Búðu til súlurit út frá tíðnitöflunni.

Sýnidæmi 2

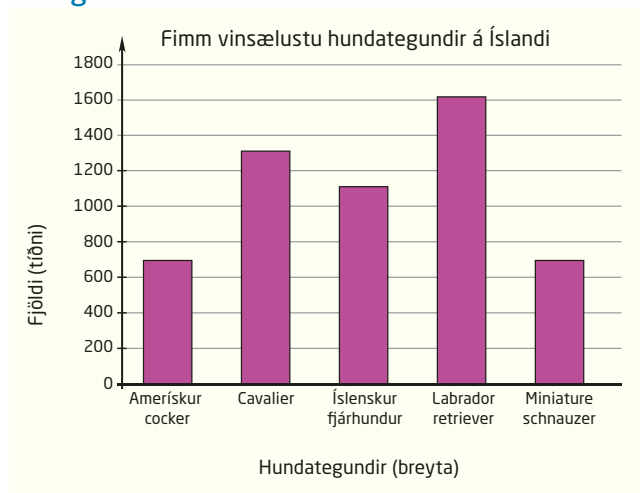
Tíðnitaflan til hægri sýnir yfirlit í stafrófsröð yfir hve margir hundar af fimm vinsælustu tegundunum voru á Íslandi.

Búðu til súlurit sem sýnir fimm vinsælustu hundategundir á Íslandi.

Hundategund	Tíðni
Amerískur cocker	706
Cavalier	1334
Íslenskur fjárhundur	1113
Labrador retriever	1613
Miniature schnauzer	732

Heimild: Heimasíða Hundaræktarfélags Íslands, desember 2014

Tillögur að lausn



Hver súla táknar hundategund. Hæð súlunnar sýnir tíðnina eða fjöldann í þeirri súlu.

4.8 Notaðu sýnidæmi 2 hér fyrir ofan.

- Hvaða hundategund var vinsælust á Íslandi?
- Hve margir fleiri hundar voru í vinsælustu tegundinni en í þeirri næstvinsælustu?
- Hve mörg prósent fleiri eru í vinsælustu hundategundinni en í þeirri næstvinsælustu?
- Það voru um 12 000 hundar skráðir hjá Hundaræktarfélagi Íslands. Hve stór hluti hundanna er meðal þeirra fimm vinsælustu?

4.9 Gerðu könnun um hvaða gæludýr bekkjarfélagar þínir eiga.

- Búðu til tíðnitöflu sem sýnir hve margir af bekkjarfélögnum eiga gæludýr og hve margir eiga hverja tegund.
- Notaðu tíðnitöfluna í a og búðu til súlurit sem sýnir hve margir bekkjarfélaga þinna eiga gæludýr og hve mörg af hverri tegund.



Hlutfallstíðni

Hluti táknar hér hve margir af heildarfjölda hafa ákveðna eiginleika.

Ef við ætlum að bera saman tvær bekkjardeildir og finna út í hvorri eru fleiri nemendur, sem ekið er í skólann, þá þurfum við að vita hve margir nemendur eru í hvorri bekkjardeild. Þá getum við fundið í hvorri bekkjardeildinni stærri *hluta* nemenda er ekið í skólann.

Hlutfallstíðni þess fjölda nemenda, sem ekið er í skólann, er hlutfallið milli fjölda nemenda, sem ekið er í skólann, og heildarfjölda nemenda í bekkjardeildinni. *Hlutfallstíðni* má skrifa sem almennt brot, tugabrot eða prósent.

Hlutfallstíðni táknar fjölda séstakra atburða deilt með heildarfjölda atburðanna.

Sýnidæmi 3

Í bekkjardeild Júlíu eru 18 nemendur og í bekkjardeild Henriks eru 25 nemendur. Í bekkjardeild Júlíu halda 4 með Liverpool í enska boltanum en í bekkjardeild Henriks eru þeir 5. Í hvorum bekkjum heldur stærri hluti með Liverpool?

Tillögur að lausn

Í bekkjardeildunum tveimur eru ekki jafn margir nemendur. Þess vegna þurfum við að nota hlutfallstíðni til að finna út í hvorum bekkjum stærri hluti heldur með Liverpool.

Bekkardeild Júlíu:

$$\text{Hlutfallstíðni} = \frac{\text{Fjöldi sem heldur með Liverpool}}{\text{heildarfjöldi nemenda}} = \frac{4}{18} \approx 0,222 = \underline{\underline{22,2\%}}$$

Bekkardeild Henriks:

$$\text{Hlutfallstíðni} = \frac{\text{Fjöldi sem heldur með Liverpool}}{\text{heildarfjöldi nemenda}} = \frac{5}{25} \approx 0,20 = \underline{\underline{20,0\%}}$$

Í bekkjardeild Júlíu heldur stærri hluti nemenda með Liverpool.

Hlutfallstíðni fjölda Liverpool-stuðningsmanna er hærri í bekkjardeild Júlíu en bekkjardeild Henriks.

Hildur

Það er
skíðaskytta A.
Hún hitti
oftast.

Björn

Það er
skíðaskytta B.
Hún hefur bara
misst marks
6 sinnum.

Atli

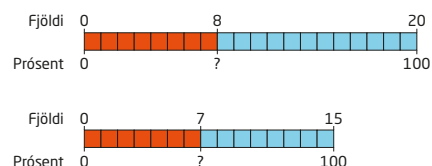
Þær hafa jafn
mikla möguleika.
Annaðhvort
hitta þær eða
þær missa marks.
Möguleikarnir
eru 50–50.

- 4.10** Skíðaskytta A hefur í fyrri keppnum hitt í mark í 30 af 50 skotum en skíðaskytta B hitti í mark í 26 af 32 skotum. Hvor þeirra á meiri möguleika á að hitta í mark í næsta skoti?

Hver eða hverjir af nemendunum hafa rétt fyrir sér? Ræddu um þetta við bekkjarfélag þinn.

- 4.11** Í fyrirtækinu „Saumastofunni“ vinna 8 konur og 12 karlar. Í fyrirtækinu „Smíðastofunni“ vinna 7 konur og 8 karlar.

- Búðu til tíðnitöflur sem sýna tíðni og hlutfallstíðni kvenna og karla í hvoru fyrirtæki.
- Í hvoru fyrirtækinu er hlutfallstíðni kvenna hærri?
- Leggðu saman hlutfallstíðnina í „Saumastofunni“.
- Hver heldurðu að summa hlutfallstíðninnar í „Smíðastofunni“ sé? Athugaðu hvort tilgáta þín er rétt.



- 4.12** Úlfar og Kristín ganga hvort í sinn skóla. Bæði kanna í sínum skóla hvaða tómsundir eru vinsælastar meðal nemenda í 8. bekk. Allir nemendur í 8. bekk í báðum skólunum taka þátt í könnuninni.

- Hve margir nemendur eru í 8. bekk í hvorum skóla?
- Bættu einum dálki við hvora tíðnitöflu fyrir hlutfallstíðnina og skráðu hana.
- Hver heldur þú að summa hlutfallstíðninnar sé?
- Í hvorum skóla er fótbolli vinsælli?
- Þú hittir nemanda úr 8. bekk í Úlfars skóla. Hverjar eru líkurnar á að hann sé þátttakandi í dansi?

Skóli Úlfars		Skóli Kristínar	
Tómsundir	Tíðni	Tómsundir	Tíðni
fótbolli	8	fótbolli	15
skátastarf	4	skátastarf	5
fimleikar	3	fimleikar	8
handbolli	2	handbolli	6
dans	5	dans	0
frjálsar íþróttir	0	frjálsar íþróttir	12
söng- og leiklist	1	söng- og leiklist	4
hestamennska	3	hestamennska	0

Hlutfallstíðni með töflureikni

Hólf er reitur í töflureikni.

Reitirnir í töflureikninum eru oftast kallaðir hólf eða sellur. Hvert hólf á sína tilvísun eftir því í hvaða röð og hvaða dálki það er. Hólfíð í röð 2 og dálki B hefur tilvísunina B2. Oft má einfalda verkefni með því að búa til töflureikni þannig að afrita innihaldið í einu hólf og líma það í annað – eða önnur – hólf. Ef við afritum texta eða tölu verður sami texti og sama tala í hólfinu sem við límdum í. Ef formúla er afrituð breytist formúlan í hverri röð eða dálki sem hún er límd í. Stundum viljum við ekki að hólf breytist þegar við afritum. Þá er notað táknið \$ fyrir framan bókstafinn til að halda dálkinum óbreyttum. Og við notum \$-táknið fyrir framan töluna til að halda röðinni óbreyttri. Þetta kallast altæk tilvísun í hólf.

Sýnidæmi 4

Í 8. A eru 4 af 18 nemendum stuðningsmenn Liverpool. Í 8. B eru það 5 af 25 og í 8. C eru það 3 af 23 nemendum. Hver er hlutfallstíðni stuðningsmanna Liverpool í hverri bekkjardeild?

Tillögur að lausn

Við getum notað töflureikni til að finna hlutfallstíðnina. Í hólf D4 skrifum við formúluna =B4/C4. Við afritum hana yfir í hólf D5 og D6. Þá breytist formúlan þannig að í hólf D5 stendur =B5/C5 og í hólf D6 stendur =B6/C6.

	A	B	C	D
1	Stuðningsmenn Liverpool			
2				
3	Bekkjardeild	Fjöldi stuðningsmanna	Fjöldi nemenda	Hlutfallstíðni
4	8. A	4	18	0,222 ← =B4/C4
5	8. B	5	25	0,2
6	8. C	3	23	0,130

Sýnidæmi 5

Nemendurnir í 8. F voru spurðir með hvaða liði í enska boltanum þeir héldu. Alls 6 nefndu Liverpool, 9 nefndu Manchester United og þeir 4, sem eftir voru, nefndu Chelsea.

Hver er hlutfallstíðni þeirra nemenda sem héldu með hverju liði?

Tillögur að lausn

Nota má töflureikni til að finna hlutfallstíðnina. Þá þarf að deila með heildarfjölda nemenda í bekkjardeildinni, þ.e. með tölunni í hólf B7.

	A	B	C
1	Stuðningsmenn liða í enska boltanum		
2			
3	Lið		Hlutfallstíðni
4	Liverpool	6	0,315 ← =B4/\$B \$7
5	Man.U.	9	0,474
6	Chelsea	4	0,211
7		19	

Við notum altæka tilvísun í hólf vegna þess að við þurfum að deila með B7 bæði í hólf B4, B5 og B6.

- 4.13** a Notaðu töflureikni og búðu til tvær tíðnitöflur þar sem önnur taflan sýnir hlutfallstíðni tómsunda í skóla Úlfars og hin taflan sýnir hlutfallstíðni tómsunda í skóla Kristínar.
- b Notaðu töflurnar í a-lið til að búa til súlurit sem sýna samanburð á því hversu vinsælar tómsundirnar eru í þessum tveimur skólum.

Skóli Úlfars	
Tómsundir	Tíðni
fótbolti	8
skátastarf	4
fimleikar	3
handbolti	2
dans	5
frjálsar íþróttir	0
söng- og leiklist	1
hestamennska	3

Skóli Kristínar	
Tómsundir	Tíðni
fótbolti	15
skátastarf	5
fimleikar	8
handbolti	6
dans	0
frjálsar íþróttir	12
söng- og leiklist	4
hestamennska	0

- 4.14** Pitsugerð nokkur er með þrjá útsöluaðil. Taflan sýnir sölutölur fyrir mismunandi pitsutegundir á þessum þremur stöðum einn laugardaginn.

Pitsutegund	Söluaður 1	Söluaður 2	Söluaður 3
ítölsk	10	22	17
amerísk	11	20	21
mexíkósk	10	8	10
japönsk	4	3	5

- a Notaðu töflureikni og búðu til súlurit sem sýnir sölutölurnar á þessum þremur sölustöðum.
- b Skrifðu þrjár setningar um hvað súluritið sýnir.
- c Raðuðu sölustöðunum þremur eftir heildarsölutölum.
- d Gerðu tíðnitöflu sem sýnir hlutfallstíðni sölutalanna fyrir hverja pitsutegund á þessum þremur sölustöðum.
- e Notaðu töfluna til að búa til súlurit sem sýnir hlutfallstíðni.
- f Á hvaða sölustað er „ítalska pitsan“ vinsælust?
- g Gerðu yfirlit sem sýnir hve stóran hluta sölustað 1 á af heildarsölu hverrar pitsutegundar fyrir sig.
- h Sölustað 1 gleymdi að telja með sölu eins starfsmannsins þennan laugardag. Hann hafði selt 6 „amerískar pitsur“, 2 „mexíkóskar“ og 3 „ítalskar“.
- Breyttu töflunni í töflureikninum og búðu til nýtt yfirlit eins og í g-lið með réttum sölutölum.



- 4.15** Allir nemendur við tvo skóla, A og B, halda skrá yfir hve mörg smáskilaboð þeir senda á einum degi.

Fjöldi smáskilaboða	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tíðni í skóla A	8	12	54	89	67	45	27	16	9	3	1
Tíðni í skóla B	4	16	37	47	32	18	9	5	6	2	0

- Notaðu töflureikni og finndu hlutfallstíðni fyrir fjölda smáskilaboða í hvorum skóla fyrir sig.
- Notaðu niðurstöðurnar í a-lið til að leggja mat á í hvorum skólanum nemendur senda fleiri smáskilaboð.

- 4.16** Tvær bekkjardeildir, A og B, taka þátt í spurningakeppni. Allir nemendur svara fjórum spurningum. Bekkjardeild A tekur þátt með 20 nemendum og bekkjardeild B með 28 nemendum. Gefið er 1 stig fyrir hvert rétt svar frá hverjum nemanda.

Spurning	Stig í A	Stig í B
1	10	15
2	14	18
3	7	10
4	16	21

- Notaðu töflureikni og finndu út hve mörg stig hver bekkjardeild hefur.
- Sú bekkjardeild vinnur sem er með flest stig. Hinni bekkjardeildinni finnst það óréttlátt. Hvers vegna finnst þeim það? Hvað finnst þér?
- Notaðu töflureikni og reiknaðu út hlutfallstíðni hvernar spurningar í hvorri bekkjardeild.
- Hvor bekkjardeildin vinnur keppnina? Rökstyddu svarið.
- Notaðu töflureikni og reiknaðu út hlutfallstíðni hvernar spurningar og hlutfallstíðni heildarstigafjöldans í báðum bekkjum. Hvaða bekkjardeild vinnur? Rökstyddu svarið.
- Hvor bekkjardeildin hefði unnið ef keppnin hefði bara innihaldið spurningu 1? Rökstyddu svarið.

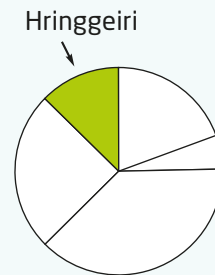
- 4.17** Taflan sýnir hve margir nemendur taka skólabílinn til þriggja skóla.

- Reiknaðu hlutfallstíðni nemenda sem taka skólabílinn til hvers skóla fyrir sig.
- Við hvaða skóla tekur stærsti hluti nemenda skólabílinn?

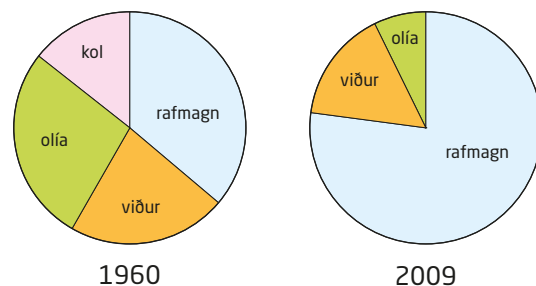
Skóli	Fjöldi nemenda	Fjöldi nemenda sem tekur skólabíl
Sóleyjarskóli	320	110
Fjóluskóli	260	76
Fífilsskóli	575	260

Skífurit

Skífurit er hringlaga flötur sem skipt er í hringgeira, einn hringgeira fyrir hvern flokk gagna. Stærð hringgeirans ákvarðast af hve stór hluti sá flokkur er af heildinni. Skífurit gefur yfirlit yfir hlutfallstíðni hvers flokks gagnanna. Hringgeirarnir sýna hlutfallstíðnina sem almennt brot eða sem prósent af heildarflatarmáli hringins.



Skífuritin hér til hliðar sýna hvaðan orkan, sem notuð var á norskum heimilum árið 1960 og árið 2009, kom. Þau sýna ekki hve mikil orka er notuð heldur hvernig hún skiptist á hina mismunandi flokka. Við sjáum til dæmis að hlutfall orku frá rafmagni var árið 2009 meira en 75% af neyslunni og það er töluverð aukning frá árinu 1960. Hlutfall orku úr eldiviði hefur lítið breyst en hluti orku úr olíu hefur minnkað.

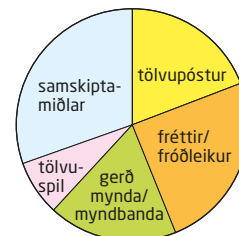


4.18 Alls 25 unglingar voru spurðir til hvers þeir notuðu netið á venjulegum degi.

Skífuritið til hægri sýnir algengustu svörin.

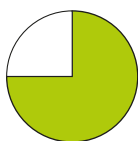
Notaðu myndritið til að svara spurningunum hér á eftir.

- Hvaða flokkur var notaður af flestum unglingunum?
- Tveir flokkar mynda um það bil helminginn af myndritinu. Hvaða flokkar eru það?
- Hvað er flokkurinn „fréttir/fróðleikur“ um það bil stór hluti af heildinni?



4.19 Í strætó borguðu 3 af 8 farþegum barnamiða.

- Hvaða skífurit hér á eftir sýnir þennan hluta farþeganna með grænum hringgeira?
- Hve marga barnamiða sýnir græna svæðið í hverju hinna skífuritanna?



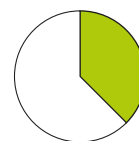
A



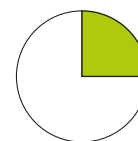
B



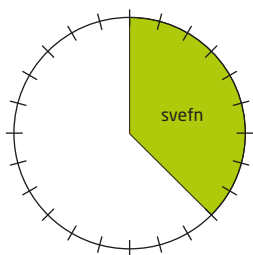
C



D



E



4.20 Dag nokkurn gerir María yfirlit yfir hvernig hún nýtir tímann.
Niðurstöðuna skráir hún í töflu.

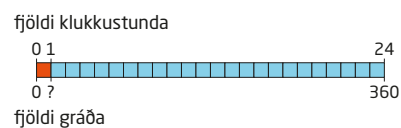
Athöfn	Klst.
svefn	9
skóli/heimanám	7
máltíðir	1
þjálfun	3
sjónvarp/netið	2
ferðir	2

a María býr til skífurit sem sýnir yfirlitið.

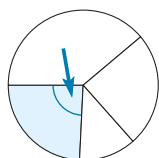
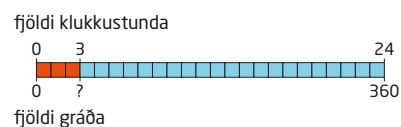
Hún teiknar fyrst hring og skiptir honum í 24 hluta, einn hluta fyrir hverja klukkustund. Síðan ákveður hún stærð hvers hringgeira. Hringgeirinn „svefn“ nær yfir 9 hluta. Ljúktu við skífuritið.

b Hringgeirinn „máltíðir“ nær yfir 1 hluta.

Hve margar gráður nær hringgeirinn yfir?
Mundu að hringurinn er 360°.



c Hve margar gráður er hringgeirinn „þjálfun“?
Athugaðu með gráðuboga hvort svarið er rétt.



Miðjuhorn

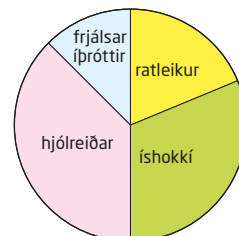
hringgeira er hornið sem hefur oddpunkt í miðju hringsins.

Stærð hringgeira má reikna út með því að reikna hlutfallstíðni flokksins, þ.e.a.s. hlutfallið milli flokksins og heildarinnar. Síðan er fundið hvað miðjuhornið er stórt með því að margfalda hlutfallstíðnina með 360°.

$$\text{Horn hringgeira} = \frac{\text{stærð flokksins}}{\text{stærð heildarinnar}} \cdot 360^\circ = \text{Hlutfallstíðni} \cdot 360^\circ$$

4.21 Sextán félagar stunda fjórar mismunandi tómstundir: ratleik, frjálsar íþróttir, hjólræiðar eða íshökkí.

Skífuritið hér til hliðar sýnir hvernig félagarnir skiptast niður á tómstundirnar fjórar.



- a** Hve margir ástunda hjólræiðar og frjálsar íþróttir samtals?
- b** Hve margir stunda hjólræiðar í samanburði við ratleik?
- c** Gerðu tíðnitöflu og reiknaðu út hornastærð allra hringgeiranna.

Sýnidæmi 6

Sunna kannar hvaða tómstundir eru vinsælastar hjá nemendum í 8. bekk í skólanum. Fyrst gerir hún tíðnitöflu til að fá yfirlit yfir hve margir nemendur kjósa hinar ýmsu tómstundir. Það eru 60 nemendur í 8. bekk.

Settu niðurstöðurnar fram í skífuriti.

Tómstundir	Tíðni
fótbolti	20
skátastarf	4
dans	9
handbolti	12
frjálsar íþróttir	15

Tillögur að lausn

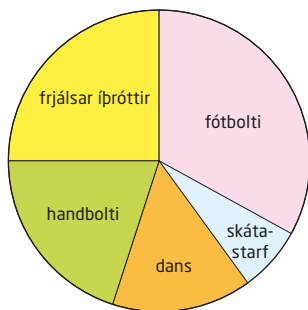
Hlutfallstíðni hvers tómstundastarfs segir til um stærð hringgeirans. Allur hringurinn, 360° , táknar þá alla nemendurna sextíu. Alls völdu 20 nemendur fótbolta. Það er þriðjungur af öllum nemendum. Þess vegna verður stærð hringgeirans: $360^\circ : 3 = 120^\circ$.

Önnur aðferð er að margfalda hlutfallstíðnina með 360° . Þá fæst:

$$\text{Miðjuhorn hringgeirans} = \frac{20}{60} \cdot 360 = 0,333 \cdot 360 = 120.$$

Tómstundir	Tíðni	Hlutfallstíðni skráð með tugabrotum	Stærð hringgeira í gráðum
fótbolti	20	$20 : 60 \approx 0,33$	$0,33 \cdot 360 = 118,8$
skátastarf	4	$4 : 60 \approx 0,07$	$0,07 \cdot 360 = 25,2$
dans	9	$9 : 60 = 0,15$	$0,15 \cdot 360 = 54$
handbolti	12	$12 : 60 = 0,20$	$0,20 \cdot 360 = 72$
frjálsar íþróttir	15	$15 : 60 = 0,25$	$0,25 \cdot 360 = 90$
summa	60	$60 : 60 = 1,00$	$1,00 \cdot 360 = 360$

Tómstundir





4.22 Alda kannar hvers konar sjónvarpsþætti nemendur við hennar skóla vilja horfa á. Hver nemandi hafði eitt atkvæði.

- a** Hve margir tóku þátt í könnuninni?
- b** Hvað eru þeir sem vilja horfa á íþróttir stórt hlutfall af öllum nemendunum?
- c** Skrifaðu töfluna upp. Bættu einum dálki við hægra megin, reiknaðu hlutfallstíðnina fyrir hvern sjónvarpsþátt og skráðu hana í nýja dálkinn.
- d** Bættu við enn einum dálki til hægri þar sem þú reiknar og skráir hve margar gráður hver geiri er.
- e** Ræddu við bekkjarfélaga þinn um hvort hægt sé að sameina einhverja sjónvarpsþættina í einn flokk.

Sjónvarpsþættir	Tíðni
íþróttir	31
fréttir	2
framhaldsþættir	26
raunveruleikaþættir	15
kvikmyndir	7
skemmtipættir	38
barnatími/unglingaþættir	12
glæpaþættir	9
heimildaðættir	13
viðtalsþættir	3

4.23 Jörundur gerir yfirlit yfir í hvað hann notar tímann á einum sólarhring.

- a** Gerðu skífurit sem sýnir yfirlitið hans Jörundar.
- b** Skráðu tímann sem þú notar til ýmissa verkefna á einum sólarhring og sýndu niðurstöðurnar í skífuriti.

Hvað gerir Jörundur á einum sólarhring?	Tími
svefn	8 klst. og 30 mín.
skóli með ferðatíma	7 klst.
tölva	1 klst. og 20 mín.
þjálfun	2 klst. og 15 mín.
heimanám	1 klst. og 30 mín.
sjónvarp	30 mín.
matartími	1 klst. og 15 mín.
annað	1 klst. og 40 mín.

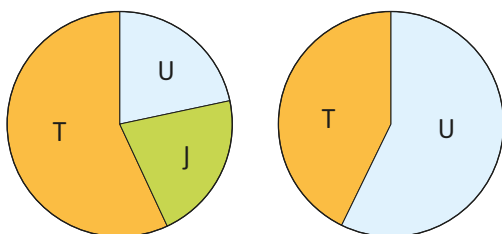
Þú finnur stærð hringgeiranna með því að breyta öllum tímanum í klukkustundir skráðar með tugabrotum.

1 klst. og 40 mín. = 1,67 klst.

- 4.24** Taflan sýnir úrslit úr fótboltaleikjum nokkurra liða: unnir leikir (U), jafntefli (J) og tapaðir leikir (T).

Fótboltalið	Fjöldi leikja	U	J	T	Stig
Ernir	14	13	0	1	39
Fálkar	14	8	1	5	25
Kjóar	14	8	0	6	24
Mávar	14	7	2	5	23
Spóar	14	3	3	8	12
Tjaldar	14	2	1	11	7

- a** Í hvaða tveimur fótboltaliðum er skiptingin milli unninna leikja, jafnteflis og tapaðra leikja sýnd í skífuritunum?



- b** Gerðu samsvarandi skífurit fyrir hvert hinna liðanna.

- 4.25** Taflan hér á eftir sýnir hlutfallslegan fjölda nemenda sem skráðir voru í skólum á Íslandi árið 2011.

Skólastig	Prósent
leikskóli	17,4%
grunnskóli	38,4%
framhaldsskóli	26,7%
háskóli	17,5%

Heimild: Hagstofa Íslands

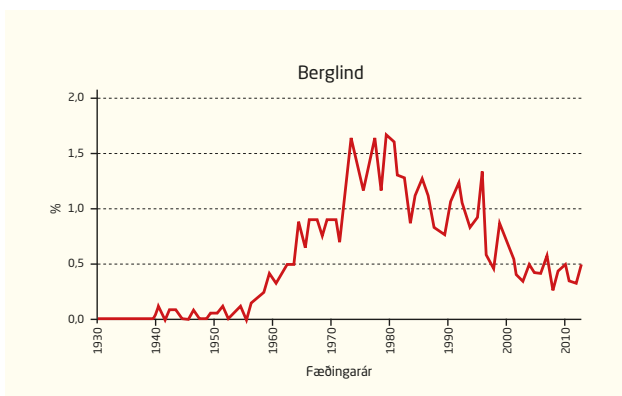
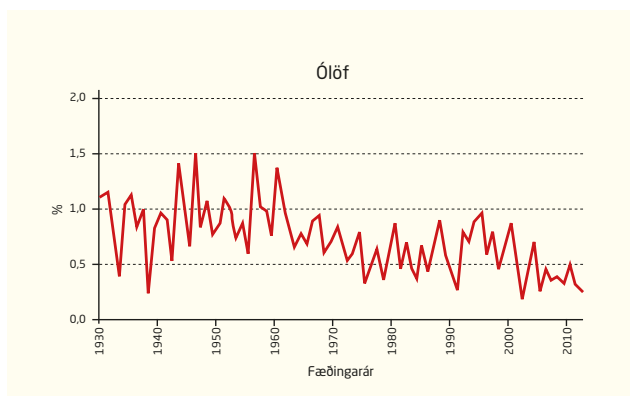
Ef þú margfaldar prósentutöluna með 3,6 færðu gráðufjöldann í skífuritinu. Ástæðan er sú að hringurinn, sem táknar 100%, er 360°. Þá er 1% jafnt og 3,6°.

- a** Bættu einum dálki við töfluna og skráðu í hann gráðufjölda hvers hringgeira í skífuriti.
- b** Sýndu upplýsingarnar í skífuriti.
- c** Nemendur á Íslandi árið 2011 voru 110 247 talsins. Hve margir voru í grunnskóla þetta ár?

Línurit

Línurit eru oft notuð til að sýna eitthvað sem breytist eftir því sem tíminn líður. Við teiknum línurit í hnitakerfi. X-ásinn er notaður sem tímaás með mælieiningar eins og sekúndur, mínútur, klukkutíma, sólarhringa, ár o.s.frv. Gildi þeirrar breytu er sýnt á y-ásnum.

4.26 Línuritin hér fyrir neðan sýna hve mörg prósent kvenna á Íslandi, sem fæddust á tímabilinu 1930–2010, hétu Ólöf og Berglind. Skoðaðu línuritin og segðu til um hvort fullyrðingarnar hér á eftir eru réttar eða rangar.



Heimild: Hagstofa Íslands

- a** Ólöf var vinsælla nafn en Berglind um 1960.
- b** Berglind var vinsælla nafn en Ólöf um 1975.
- c** Árið 1940 báru fleiri nafnið Ólöf en Berglind.
- d** Árið 1970 báru um það bil jafn margar konur nöfnin Ólöf og Berglind.
- e** Árið 1930 bar engin kona nafnið Berglind.
- f** Árið 1980 báru um það bil tvöfalt fleiri nafnið Berglind en Ólöf.





4.27 Taflan hér á eftir sýnir netnotkun heima meðal norskra stráka og stelpna á aldrinum 16–24 ára. Tölurnar sýna hve mörg prósent aðspurðra svöruðu að þeir hefðu notað netið á síðustu þremur mánuðum. Könnunin var endurtekin árlega frá 2003 til 2010, bæði árin meðtalin.

kyn \ ár	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
strákar	81	77	77	94	90	95	96	99
stelpur	71	64	79	90	84	98	99	97

Heimild: Statistisk sentralbyrå (SSB).

- Sýndu niðurstöðurnar í línuriti. Gott er að nota töflureikni.
- Ræddu muninn á netnotkun strákanna og stelpnanna heima.

4.28 Marta er með flensu. Hún mælir líkamshita sinn kl. 08:00 og kl. 20:00 á hverjum degi í eina viku og skráir niðurstöðurnar.

	miðvikud.		fimmtud.		föstud.		laugard.		sunnud.		mánud.		þriðjud.	
klukkan	08:00	20:00	08:00	20:00	08:00	20:00	08:00	20:00	08:00	20:00	08:00	20:00	08:00	20:00
hitastig, °C	39,8	40,4	40,1	40,6	39,4	40,0	39,2	39,8	38,9	39,7	38,2	38,9	37,8	37,3

- Búðu til línurit sem sýnir hitastig Mörtu.
- Hvað segir línuritið um ástand Mörtu þessa viku?

Tröppurit

Tröppurit er notað þegar eitthvað hefur haft sama gildi um nokkurn tíma og síðan tekur gildið „stökk“ einu sinni eða oftar. Tröppurit kemur fram sem nokkur lárétt strik sem saman líta út eins og þrep í tröppum en strikin geta verið mislöng.

Sýnidæmi 7

Sýndu flutningsgjald Póstsins fyrir A-póst í tröppuriti.

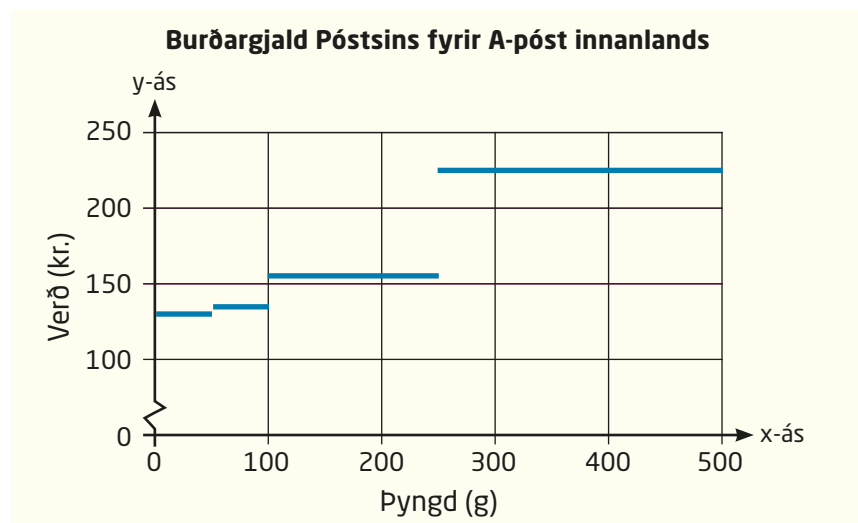
þyngd (g)	Burðargjald (kr.) fyrir A-póst í apríl 2014		
	innanlands	til Evrópu	til landa utan Evrópu
0–50	130	180	249
51–100	135	310	489
101–250	155	600	985
251–500	225	1055	1790

Heimild: Íslandspóstur hf.

Burðargjald Póstsins er hið sama fyrir öll bréf sem vega 0–50 g en síðan tekur gjaldið „stökk“ og verður hið sama fyrir öll bréf frá 51–100 g.

Tillaga að lausn

Ef þyngdin í grömmum er sýnd á x-ásnum og verðið í krónum á y-ásnum í hnitakerfi er hægt að setja burðargjaldið á Íslandi fram í tröppuriti.



4.29 Skoðaðu töfluna yfir burðargjald Póstsins í sýnidæmi 7.

- a** Hvað kostaði að senda bréf, sem er 17 g, innanlands?
- b** Hvað kostaði að senda bréf, sem er 75 g, til Bandaríkjanna?

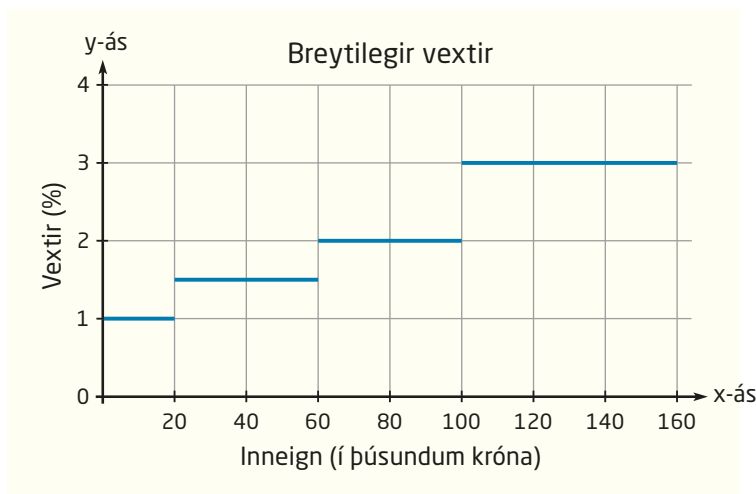
Ef þyngdin á bréfinu er ekki í töflunni þarftu að finna í hvaða þyngdarflokki bréfið er.



4.30 Notaðu töfluna um burðargjald Íslandspósts í sýnidæmi 7 og gerðu tröppurit sem sýnir burðargjaldið fyrir bréf sem sent var til

- a** Evrópu
- b** landa utan Evrópu

4.31 Gróa er með sparnaðarreikning í banka. Tröppuritið sýnir hvernig vextirnir breytast þegar inneignin hækkar.



- a** Hverjir eru vextirnir ef Gróa ætti 75 000 kr. á sparireikningnum sínum?
- b** Gróa á 50 000 kr. á reikningnum. Hún leggur 65 000 kr. inn í viðbót. Hve mikið breytast vextirnir?

Flokkaskipt gögn

Flokkur er safn gagna eða upplýsinga með gildi sem tilheyra ákveðnu talnasviði.

Tilhneiging í gögnunum segir til um hvernig þau dreifast í meginatriðum.

Breidd flokka er mismunurinn á hæsta og lægsta gildi talnasviðsins sem gögnin skiptast í.

Pegar við höfum gögn með mörgum mismunandi gildum getum við raðað gögnunum í ákveðna flokka til að fá betri yfirsýn yfir þau. Oftast eru búnir til flokkar með svipaða breidd. Þegar teknar eru ákvarðanir um flokkana eru notaðir hornklofar, [, og táknið >. Þessi tákn sýna í hvaða flokk á að setja ákveðna tölu en það fer eftir gildi hennar.

- [merkir „frá og með eftirfarandi tölu“
- > merkir „allt að tölunni en hún er sjálf ekki meðtalin“

Við getum búið til stuðlarit til að kynna flokkaskipt gögn. Þar sem búið er að raða gögnunum í ákveðna flokka mun stuðlaritið sýna aðaleinkenni gagnasafnsins. Þetta á einkum við um flokka sem eru mjög breiðir. Ef ætlunin er að rannsaka gagnasafnið nákvæmar er hentugt að velja minni flokkabreidd. Þar sem flokkarnir liggja hver upp við annan gera stuðlarnir það líka.

Sýnidæmi 8

Allir nemendur í einni bekkjardeild blása sogrörarakettu lárétt. Á gólfinu mæla þeir vegalengdirnar sem raketturnar flugu. Þeir mæla í sentimetrum:

345, 456, 477, 245, 351, 568, 342, 152, 571, 428, 293, 521, 336, 385, 149, 347, 130, 269, 473, 128, 227, 389, 169, 263, 336, 359, 451, 421.

Sýndu niðurstöðurnar í viðeigandi myndriti.

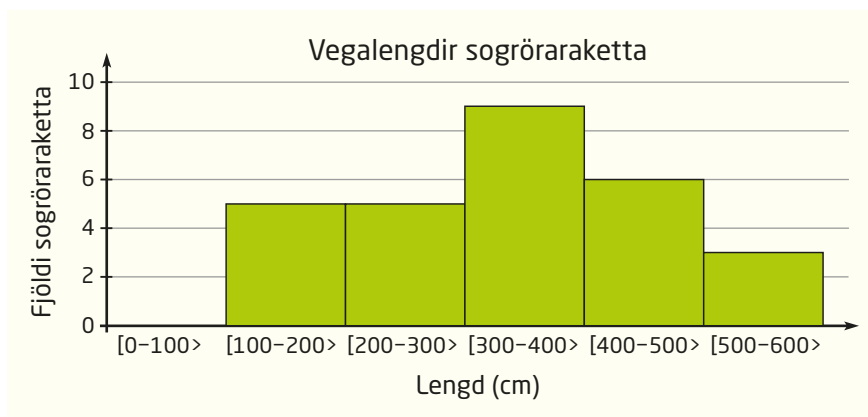
Tillögur að lausn

- 1 Við röðum gögnum í flokka í breiddinni 100 cm. Öllum lengdunum frá og með 200 cm og upp að 300 cm er safnað í flokkinn [200–300>.

Öllum lengdunum frá og með 300 cm og upp að 400 cm er safnað í flokkinn [300–400>, o.s.frv.

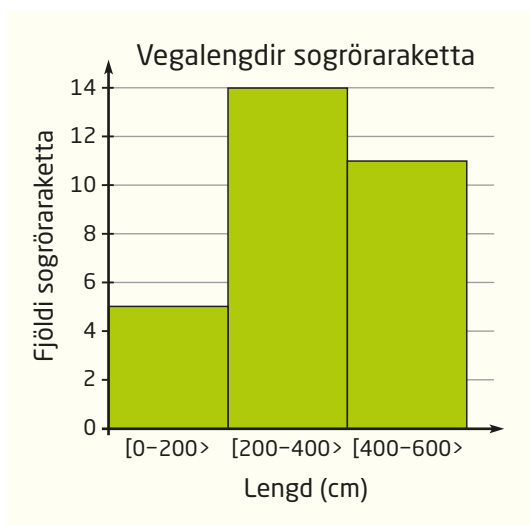
Breidd flokka í cm	Tíðni
[0–100>	0
[100–200>	5
[200–300>	5
[300–400>	9
[400–500>	6
[500–600>	3

Þú færð upplýsingar um sogrörarakettu hjá kennaranum.



Stuðlarit er súlurit þar sem súlurnar liggja hver upp að annarri.

- 2 Við röðum gögnunum í flokka með flokkabreiddinni 200 cm.



Breidd flokka í cm	Tíðni
[0-200>	5
[200-400>	14
[400-600>	11

Í tillögu að lausnum nr. 1 og 2 er breidd flokkanna mismunandi. Hvor breiddin finnst þér betri?

4.32 Mældu lengd á ennistoppi allra bekkjarfélaga þinna.

- Búðu til tíðnitöfu og raðaðu ennistoppalengdinni í flokka með breiddinni 5 cm.
- Sýndu niðurstöðurnar í stuðlariti en þá standa súlurnar þétt hver upp við aðra.



4.33 Hér má sjá fjölda marka sem handboltaliðið Boltahetjurnar skoraði í 20 leikjum á einu leikjatímabili.

24, 15, 24, 21, 19, 12, 14, 21, 27, 24, 24, 18, 26, 20, 23, 21, 21, 27, 18, 24

Fjöldi marka	Tíðni
[10–15>	
[15–20>	
[20–25>	
[25–30>	

- Raðaðu gögnunum í flokka með breiddinni 5 og finndu tíðnina í hverjum flokki. Skrifaðu niðurstöðurnar í töflu.
- Búðu til stuðlarit út frá gögnunum í a-lið.
- Flokkaðu gögnin að nýju, að þessu sinni á breiddin á flokkunum að vera 3. Finndu tíðnina í hverjum flokki og búðu til stuðlarit.
- Hvort stuðlaritið finnst þér að gefi betra yfirlit yfir gögnin?

Ýmis verkefni

Fjarlægð milli heimilis og skóla

Þetta verkefni er fyrir alla bekkjardeildina.

Þið þurfið

- stafrænt landakort
- töflureikni

Aðferð

- Notaðu stafrænt landakort, finndu skólann og húsið sem þú býrð í.
- Notaðu reglustikuna á stafræna landakortinu og mældu vegalengdina milli heimilis og skóla eftir leiðinni sem þú gengur í skólann eða sem þér er ekið eftir. Ekki mæla loftlínuna!
- Notaðu töflureikni og gerðu yfirlit yfir hve langt allir í bekkjardeildinni þurfa að fara milli heimilis og skóla.
- Taktu ákvörðun um breidd á flokkunum og búðu til tíðnitöflu yfir vegalengdirnar.
- Búðu til stuðlarit yfir vegalengdirnar. Mundu að stuðlar, sem sýna flokkaskipt gögn, eiga að standa hver upp við annan!



Gagnasöfn

Á Íslandi er sérstök stofnun, Hagstofa Íslands, sem fylgist með samfélagsþróuninni og safnar saman ýmsum tölulegum gögnum. Þeim er safnað í stór gagnasöfn. Til eru margs konar gagnasöfn með miklu magni tölulegra upplýsinga.

Gagnasafn hefur að geyma mikið magn upplýsinga.

4.34 Giskaðu, kannaðu og kynntu.

- a Giskaðu á hve margir bera sama fornafn og þú.
- b Notaðu töluleg gögn Hagstofunnar um nöfn og athugaðu hvort ágiskun þín í a-lið er rétt. Skrifaðu niður hvaða ár flest ungbörn fengu sama nafn og þú.
- c Notaðu töluleg gögn Hagstofunnar og finndu topp-tíu-lista yfir karlmanns- og kvenmannsnöfn árið sem þú fæddist. Settu listann fram í myndriti.
- d Notaðu töluleg gögn Hagstofunnar og finndu hve margir eiga sama afmælisdag og þú.
- e Notaðu tölfræðigögn Hagstofunnar og finndu hve margir fæddust sama dag og þú.

4.35 Giskaðu, kannaðu og kynntu.

- a Giskaðu á í hve margar mínútur stelpur og strákar á Íslandi horfa á sjónvarpið á einum degi.
- b Gerðu könnun meðal bekkjarfélaga þinna um hve lengi þeir horfa á sjónvarpið á venjulegum degi, raðaðu upplýsingunum í flokka og búðu til tíðnitöflu. Berðu niðurstöðurnar saman við ágiskun þína í a-lið.
- c Spurðu u.þ.b. 10 fullorðna sömu spurningar. Safnaðu saman slíkum upplýsingum frá öðrum bekkjarfélögum og gerðu flokkaskipta tíðnitöflu.
- d Er munur á sjónvarpsáhorfi bekkjarfélaga þinna og fullorðinna? Hver er munurinn?

4.36 Giskaðu, kannaðu og kynntu.

- a Í hvaða 10 löndum í heiminum heldur þú að séu flestir íbúar á km²?
- b Notaðu gagnasafn Félags Sameinuðu þjóðanna á Íslandi, Globalis.is, og finndu hvaða tíu lönd í heiminum hafa flesta íbúa á km².
- c Settu upplýsingarnar fram í myndriti.



Greining og útreikningar

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna út gildi sem sýna miðsækni á þrjá mismunandi vegu (meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi)
- reikna út gildi sem sýnir dreifingu
- bera gögn saman við meðaltal yfir lengra tímabil

Gildi sem lýsa miðsækni segja til um hvar „miðjan“ er í stóru safni gagna.

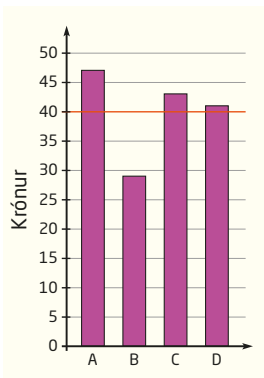
Gildi sem lýsa dreifingu segja til um hvernig gögnin dreifast.

Greining og útreikningar á gögnum geta auðveldað túlkun niðurstaðna úr könnun. Segir könnunin til um að eitthvað sé mjög dæmigert? Er einhver aðferð til að reikna út „miðju“ gagnanna betri en önnur? Eru gögnin dreifð eða samþjöppuð? Til að fá svör við slíkum spurningum má nota gildi sem lýsa *miðsækni* og *dreifingu*. Það eru þrenns konar gildi sem lýsa miðsækni: meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi.

Meðaltal

Meðaltal er það gildi sem við fáum ef við hugsum okkur að öllum tölunum sé dreift jafnt. Ef fjórir krakkar eiga 470 kr., 290 kr., 430 kr. og 410 kr. í buddunum sínum eiga þeir $470 \text{ kr.} + 290 \text{ kr.} + 430 \text{ kr.} + 410 \text{ kr.} = 1600 \text{ kr.}$ samtals. Ef þessum peningum er skipt jafnt milli krakkanna verður dæmið svona: $1600 : 4 = 400$. Krakkarnir eiga þá að meðaltali 400 kr. í buddunum sínum.

$$\text{Meðaltal} = \frac{\text{Summa allra talnanna}}{\text{fjöldi talnanna}}$$



Sýnidæmi 9

Taflan hér á eftir sýnir hæð leikmanna í tveimur körfuboltaliðum, liði A og liði B. Stuðningsmenn liðanna þrættu um hvort liðið hefði á að skipa hærri leikmönnum.

Hvort liðið er með hærri leikmenn?

Lið A hæð í cm	162	176	156	177	174	172	175	162
Lið B hæð í cm	176	172	164	180	168	173	168	

Tillaga að lausn

Meðalhæð leikmanna í liði A:

$$\frac{162 + 176 + 156 + 177 + 174 + 172 + 175 + 162}{8} = \frac{1351}{8} \approx \underline{169}$$

Meðalhæð leikmanna í liði B:

$$\frac{176 + 172 + 164 + 180 + 168 + 173 + 168}{7} = \frac{1201}{7} \approx \underline{172}$$

Meðalhæð leikmanna í liði B er hærri.

- 4.37** Tíu nemendur ákváðu að byrja að safna frímerkjum. Eftir mánuð báru þeir sig saman og þá kom í ljós að þeir áttu svona mörg frímerki:

55 – 60 – 95 – 65 – 50 – 50 – 65 – 85 – 55 – 75

- a Hve mörg frímerki áttu nemendurnir tíu samtals?
- b Hve mörg frímerki áttu nemendurnir tíu að meðaltali?
- c Hve margir nemendanna áttu fleiri frímerki en meðaltalið sagði til um?

- 4.38** Hitastigið var mælt á hverjum degi kl. 12:00.

- ☒ a Í fimm daga mældist hitinn 2 °C, 3 °C, 6 °C, 9 °C og 5 °C.
Finndu meðalhitann.
- ☐ b Eina vikuna mældist hitinn þessi: 6 °C, 3 °C, –4 °C, 0 °C, 3 °C, –3 °C og 2 °C.
Finndu meðalhitann.
- ☐ c Eina vikuna mældist hitinn þessi: 2 °C, 3,5 °C, –5 °C, 0 °C, 2,5 °C, –6,5 °C og 0 °C.
Finndu meðalhitann.

Miðgildi

Miðgildi lýsir miðsækni. Miðgildi er sú tala sem er í miðjunni þegar búið er að raða öllum tölunum í talnasafni í hækkandi röð. Ef tvær tölur eru í miðjunni er miðgildið mitt á milli þeirra.

Við finnum miðgildið mitt á milli tveggja talna með því að reikna út meðaltal talnanna tveggja:

$$\frac{41 + 43}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

Við getum hugsað um miðgildi þannig að öllum tölunum sé skipt í tvo hópa með jafn mörgum tölum í hvorum hópi. Þá verða allar tölurnar í öðrum hópnum minni en miðgildið og allar tölurnar í hinum hópnum stærri en miðgildið. Fjórir krakkar athuga hve miklir peningar eru í buddunum þeirra. Þeir eru með 47 kr., 29 kr., 43 kr. og 41 kr. Til að finna miðgildið röðum við tölunum í hækkandi röð.

29 – 41 – 43 – 47

Hér eru tvær tölur í miðjunni, 41 og 43. Miðgildið er mitt á milli þessara talna, það er að segja 42. Miðgildið er gagnlegt til að lýsa miðsækni – einkum ef í talnasafninu eru tölur sem eru mjög ólíkar hinum.

Sýnidæmi 10

Jafnvel þótt meðalhæðin í liði B (sjá sýnidæmi 9) sé hærri telja stuðningsmenn liðs A að meðaltalið sýni ekki best hvort liðið hefur á að skipa hærri leikmönnum. Lið A vill þess vegna ganga úr skugga um hvert miðgildi hæðar leikmanna er í liði A og liði B. Notaðu töfluna í sýnidæmi 9 og finndu miðgildi hæðar leikmanna í liði A og liði B. Berðu saman miðgildin.

Tillaga að lausn

Við röðum tölunum í hækkandi röð til að finna miðgildið í liði A. Þar sem fjöldi leikmanna í liði A er slétt tala finnum við meðaltal talnanna tveggja sem eru í miðjunni.

156	162	162	172	174	175	176	177		
$\frac{172 + 174}{2} = 173$									
Miðgildið í liði A er 173 cm.									

Við röðum einnig tölunum í hækkandi röð til að finna miðgildið í liði B. Þar sem fjöldi leikmanna í liði B er oddatala finnum við töluna í miðjunni.

164	168	168	172	173	176	180		
Miðgildið í liði B er 172 cm.								

Þegar við berum saman miðgildin tvö sést að leikmennirnir í liði A eru hærri en leikmennirnir í liði B.



- 4.39** Nokkrir nemendur kanna hve mikla peninga nemendur í 8. bekk hafa venjulega í veskinu sínu. Þeir spyrja þess vegna fimm bekkjarafélaga. Fjórir fyrstu hafa 510 kr., 1250 kr., 800 kr. og 640 kr. Sá fimmti var einmitt þennan dag með peninga í veskinu sem hann átti að nota eftir skóla til að kaupa sér jakka; hann var því með 21 000 kr. í veskinu.
- Finndu meðaltal og miðgildi þessara fimm talna.
 - Hvort þessara gilda, meðaltal eða miðgildi, gefur betri upplýsingar um hve mikla peninga nemendur í 8. bekk eru venjulega með í veskinu sínu?
 - Þar sem ákveðnar ástæður eru fyrir því að fimmti nemandinn er með svo mikla peninga í veskinu sínu ákveða nemendurnir að taka þá tölu ekki með í útreikninginn.
Finndu meðaltal og miðgildi fjögurra fyrstu talnanna.
 - Hve mikið breyttist meðaltalið við það að sleppa hæstu tölunni?
 - Hve mikið breyttist miðgildið við það að sleppa hæstu tölunni?

- 4.40** Þessi tafla sýnir þyngd og hæð allra í fjölskyldu Péturs.

Fjölskyldumeðlimir	Þyngd (kg)	Hæð (cm)
amma	78	156
pabbi	96	187
mamma	62	168
Pétur	71	173
Sylvía	48	153

- Finndu miðgildið fyrir þyngd og hæð.
- Finndu meðalþyngd og meðalhæð.

- 4.41** Tómskundaklúbburinn Virkir krakkar stóð fyrir 15 skemmtikvöldum á síðasta skólaári. Klúbburinn gerði yfirlit yfir hve margir meðlimir tóku þátt í þessum skemmtikvöldum.

54, 22, 36, 12, 16, 25, 52, 25, 31, 29, 42, 25, 33, 19, 47

- Hve margir klúbbmeðlimir tóku þátt í skemmtikvöldunum að meðaltali?
- Finndu miðgildið.

- 4.42** Meðaleinkunn í 8. A er 3,5 en einkunnastiginn er frá 0 til 6. Nemendur eru alls 28. Taflan sýnir hvernig einkunnirnar dreifðust.

Einkunn	1	2	3	4	5	6
Tíðni	2	5	7	?	5	2

- Finndu hve margir nemendur fengu einkunnina 4.
- Finndu miðgildið.



Tíðasta gildi

Tíðasta gildi er eitt þeirra gilda sem lýsa miðsækni. Tíðasta gildi segir til um þá tölu í talnasafninu sem hefur hæstu tíðnina.

Sýnidæmi 11

Notaðu töfluna í sýnidæmi 9 og finndu tíðasta gildi hæðar leikmanna í liði A og í liði B. Berðu síðan saman tíðustu gildin.

Tillögur að lausn

Ef einn leikmaður hefði verið til viðbótar í liði B sem væri 172 cm hefðu verið tvö tíðustu gildi í liði B: 168 cm og 172 cm.

156	162	162	172	174	175	176	177
<u>Tíðasta gildi hæðar leikmanna í liði A er 162 cm</u>							
164	168	168	172	173	176	180	
<u>Tíðasta gildi hæðar leikmanna í liði B er 168 cm</u>							

- **4.43** Lárus fékk þessar einkunnir fyrir heimaverkefni á skólaárinu.

5, 3, 2, 2, 5, 2, 3, 1, 4, 4, 4, 1, 2, 4, 4, 1

- a** Finndu tíðasta gildi einkunna sem Lárus fékk.
b Finndu miðgildi einkunnanna.

Einkunnastiginn er frá 0 til 6.

- **4.44** Á prófi fengu nemendur að vita að miðgildi einkunna væri 3 og að tíðasta gildið væri 4. Taflan sýnir hluta af niðurstöðum úr prófinu. Hve margir nemendur fengu einkunnina 4 á prófinu?

Einkunn	1	2	3	4	5	6
Tíðni	3	4	7	?	4	1

- **4.45** Berðu saman meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi í liði A og liði B í sýnidæmum 9, 10 og 11. Hvert þessara þriggja miðsæknigilda gefur bestu upplýsingarnar um hæð leikmanna? Rökstyddu svarið.

Í langri halarófu

Þetta verkefni er fyrir alla bekkjardeildina.

Þið þurfið

- pappír
- blýant

Aðferð

- 1 Finnið stað þar sem er gott pláss.
- 2 Raðið ykkur upp í „langa halarófu“ eftir því hve mörg systkini þið eigið. Þeir sem eiga ekki systkini eiga að standa lengst til vinstri í röðinni og síðan raðast hinir í röðina eftir því sem þeir eiga fleiri systkini. Þið megið ekki tala saman heldur þurfið þið að nota fingurna til að hafa samskipti hvert við annað.
- 3 Nemandinn, sem stendur lengst til vinstri í röðinni, er númer 1. Síðan kemur númer 2, 3, 4 og þannig áfram allt til síðasta nemandans. Þetta eigið þið að nota til að finna nemandann, sem táknar miðgildið, og jafnframt hve mörg systkini hann á.
- 4 Byrjið á nemandanum sem stendur lengst til vinstri í röðinni. Nemendur segja „núll“ ef þeir eiga engin systkini. Næsti nemandi bætir við fjölda systkina sinna. Þegar síðasti nemandinn nefnir tölu á það að vera summan af fjölda systkina sem allir nemendur bekkjardeildarinnar eiga. Nemendur finna meðaltal fyrir fjölda systkina í bekkjardeildinni og skrá niðurstöðu.
- 5 Nú stilla nemendur sér upp hver fyrir aftan annan þannig að þeir sem eiga sama fjölda systkina eru í sömu röð. Nemendur telja og skrifa niðurstöður í tíðnitöflu.
- 6 Hvernig getið þið raðað öllum í bekkjardeildinni þannig að greinilegt sé „hver eða hverjir“ tákni tíðasta gildið? Hvert er tíðasta gildið?
- 7 Notið töflureikni og útbúið kynningu á niðurstöðum úr þessu verkefni.



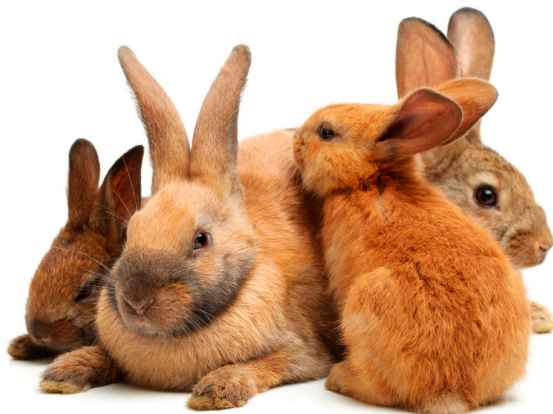
4.46 Í þriggja systkina hópi er bæði miðgildi og meðalaldur 8 ár. Það er ekkert tíðasta gildi.

- ☐ **a** Hve gömul geta systkinin verið? Finndu að minnsta kosti tvö mismunandi svör.
- ☐ **b** Finndu alla möguleika í a-lið.
- ☐ **c** Í fjögurra systkina hópi er meðalaldurinn 12 ár og miðgildið er 11,5 ár. Elsta systkinið er 4 árum eldra en næstelsta systkinið. Ekkert tíðasta gildi er og aldursmunur milli elsta og yngsta systkinis er 9 ár. Hve gömul eru systkinin fjögur?

4.47 Arnhildur ákveður að vigta kanínurnar sínar fimm. Hún skráir niðurstöður í töflu:

Nafn	Tegund	Þyngd (kg)
Stúfur	Dvergkanína	2,6
Snjálдра	Lion head	3,1
Kóngsi	Rex	7,6
Ljúfa	Angóra	3,9
Trítla	Mini loupe	3,4

- ☐ **a** Finndu meðalþyngd kanínanna og miðgildið.
- ☐ **b** Hvort finnst þér henta betur í a-lið meðaltalið eða miðgildið? Rökstyddu svarið.
- ☐ **c** Útskýrðu hvers vegna það er út í hött að leita að tíðasta gildi þyngdar á kanínunum.
- ☐ **d** Arnhildur eignast eina kanínu í viðbót. Þá lækkar meðalþyngd kanínanna í 3,9 kg. Hvað vegur nýja kanínan?



Miðsækni í töflureikni

G7		fx =AVERAGE(A2:G4)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Einkunn									
2	4	5	1	3	2	4	6			
3	5	2	3	4	2	3	4			
4	2	3	5	4	6	3	4			
5										
6										
7				Meðaltal:			3,571			
8										
9				Miðgildi:			4			
10										
11				Tíðasta gildi:			4			
12										

Töflureiknirinn hér fyrir ofan sýnir einkunnir úr stærðfræðiprófi í 8. A. *Gagnasvæðið* í töflureikninum er A2:G4 sem er lesið „A2 til G4“. Til að finna meðaltalið (average), miðgildið (median) og tíðasta gildið (mode) fyrir einkunnirnar í 8. A skrifum við þessar formúlur í *formúlulínuna*.

=AVERAGE(A2:G4)

=MEDIAN(A2:G4)

=MODE(A2:G4)

Ef við ætlum að nota þessar formúlur til að finna miðsækni í töflureikni þarf að skrá tölurnar hverja fyrir sig en ekki gefa þær upp í tíðnitöflu.

Gagnasvæði
eru þau hólf í töflureikninum sem í eru gögn.

Formúlulína
er línan sem er næst fyrir ofan töflureikninn þar sem maður skrifar formúlur.

- 4.48

Taflan til hægri sýnir aldur meðlima í tómstundaklúbbsi unglínga. Notaðu töflureikni til að leysa verkefnið hér á eftir.

a

Finndu meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi fyrir aldur meðlima.

b

Búðu til tíðnitöflu sem sýnir aldursdreifingu.

c

Sýndu aldursdreifingu í súluriti.

d

Sýndu aldursdreifingu í skífuriti.

Aldur		
14	16	17
15	14	14
16	14	16
15	16	16
18	17	15

Dreifing

Pegar segja á til um hve niðurstöður úr rannsókn eru ólíkar má skoða hvernig þær dreifast. Eitt gildi, sem þá er hægt að skoða, er spönn. Spönnin er mismunurinn á hæsta og lágsta gildi í gagnasafninu.

Spönn = hæsta gildi – lágsta gildi

Sýnidæmi 12

Tveir nemendahópar hlaupa 60 m. Það eru 5 nemendur í hvorum hópi. Finndu spönn niðurstaðna í 60 m hlaupi nemenda í hópi 1.

	Tími (sek.)				
Hópur 1	9,8	10,4	9,4	10,2	9,9
Hópur 2	9,4	8,9	10,7	9,9	10,8

Tillaga að lausn

Spönn er mismunurinn á hæsta og lágsta gildi gagnasafnsins. Hæsta gildið er 10,4 sek. og lágsta gildið er 9,4 sek.

$$10,4 - 9,4 = \underline{1,0}$$

Spönnin í hópi 1 er 1,0 sek.

4.49 Notaðu sýnidæmi 12.

- a Finndu og berðu saman meðaltímann og miðgildið í hópi 1 og hópi 2.
- b Finndu spönn niðurstaðna í 60 m hlaupi í hópi 2.
- c Hvaða upplýsingar gefur spönnin í b-lið?
- d Berðu saman spönnina í hópi 1 í sýnidæmi 12 og spönnina í hópi 2 sem þú fannst í b-lið.
- e Ræddu við bekkjarfélaga þinn og finnið dæmi um hvenær það er kostur og hvenær það er galli þegar spönnin er stór eða þegar hún er lítil.

- 4.50 Tvær bekkjardeildir fara í náttúrufræðipróf. Í annarri bekkjardeildinni er hæsta einkunnin 6 og sú lægsta 1. Í hinni deildinni er hæsta einkunnin 5 og sú lægsta 3. Finndu spönn einkunnanna í hvorri bekkjardeild fyrir sig.

- 4.51 Fyrir nokkrum árum var kílóverð á fjórum matvörutegundum kannað í fimm mismunandi verslunum. Finndu spönn verðsins á hverri matvörutegund fyrir sig.

matvara	Kílóverð (kr.)				
	verslun 1	verslun 2	verslun 3	verslun 4	verslun 5
mysingur	598	1670	1578	1390	1630
kjötfars	1198	930	1176	998	1250
pylsur	786	998	1318	1510	1050
sykur	270	298	250	230	258

- 4.52 Í tveimur handboltaliðum stúlkna, fæddra 1997, er aldurinn mismunandi. Í liði A er elsta stúlkan fædd 5. apríl og sú yngsta 23. nóvember. Í liði B er elsta stúlkan fædd 7. mars og sú yngsta 12. október.
- a Finndu spönn aldurs stúlkna í hvoru liði fyrir sig. Skráðu svörin í dögum.
 - b Getur verið að hærri meðalaldur sé í liði A en í liði B? Útskýrðu svarið. Gott er að nota dæmi með tölum.

Dreifing í töflureikni

Til að finna spönn með töflureikni eru notaðar tvær aðgerðir, annars vegar til að finna hæsta gildi og hins vegar lægsta gildi.

Í töflureikni skrifum við $\text{=max(gagnasvæði) - min(gagnasvæði)}$ í formúlulínu töflureiknisins.

4.53 Töflureiknirinn sýnir tímann sem það tók þátttakendur að fara ákveðna vegalengd í skíðagöngu. Notaðu töflureikninn til að finna

- a** tíma vinningshafans
- b** meðaltímann
- c** spönn tíma þáttakenda

A2 fx 01 : 32 : 17			
	A	B	C
1	Tími		
2	01 : 32 : 17		
3	01 : 45 : 12		
4	01 : 37 : 46		
5	01 : 39 : 10		
6	01 : 37 : 15		
7	01 : 38 : 05		
8	01 : 42 : 25		
9	01 : 31 : 46		
10	01 : 35 : 16		
11	01 : 40 : 20		
12	01 : 37 : 12		
13	01 : 33 : 10		

4.54 Til að athuga hvort skólinn geti sparað rafmagn ætla nemendur að kanna hitastigið í kennslustofunni á nóttunni. Þeir athuga hitastigið á klukkutíma fresti frá skólalokum kl. 15:00 til og með skólabyrjun næsta dag kl. 08:00. Hitastigið mældist þetta (í °C):

Hitastig, °C																	
22,3	22,1	22,0	21,9	21,9	21,3	21,0	20,5	20,2	20,0	19,5	19,3	19,0	18,5	19,2	19,7	20,3	20,6

Notaðu töflureikni til að finna

- a** hæsta hitastigið
- b** lægsta hitastigið
- c** meðalhitastigið
- d** spönn hitastigsins

Skutlukeppni

Tveir nemendur vinna saman að þessu verkefni.

Þið þurfið

- pappír
- málband sem getur mælt allt að 25 metrum
- blýant

Aðferð

- 1 Búið til tvær pappírsskutlur sem ætlað er að fljúga eins langt og hægt er.
- 2 Hvor nemandi kastar skutlu fimm sinnum. Sá sem kastar ekki hverju sinni mælir og skráir hve langt skutlan flýgur.
- 3 Skriðið lengdir allra kastanna í töflu.
- 4 Reiknið út meðaltalið, miðgildi og spönnina fyrir báðar skutlurnar og finnið besta kast hvorrar skutlu.
- 5 Búið til lista yfir niðurstöðurnar til að kynna fyrir allri bekkjardeildinni.

Afbrigði

Brjótið pappír og búið til skutlu sem ætlað er að haldast lengi á lofti. Takið tímann hve lengi skutlurnar eru á lofti. Kannið niðurstöður og búið til lista yfir þær.

Ef skutlan þín er á lofti í meira en 27,6 sek. hefur þú slegið heimsmetið í skutluflugi!



Meðaltal 30 ára tímabils

Stundum eru reiknuð meðaltöl yfir langt tímabil. Síðasta tímabil, sem slík meðaltöl voru reiknuð fyrir, var 1961–1990. Slík gildi eru gagnleg þegar bera á saman gildi til dæmis í tölfræði eða veðurfræði.

4.55 Taflan hér á eftir sýnir meðalúrkomu á mánuði á tímabilinu 1961–1990 á tveimur stöðum á Íslandi, annars vegar á Kirkjubæjarklaustri og hins vegar á Akureyri.

Staður \ Mán.	Meðalúrcoma (mm) eftir mánuðum tímabilið 1961–1990											
	jan.	febr.	mars	apríl	maí	júní	júlí	ágúst	sept.	okt.	nóv.	des.
Kirkjubæjarklaustur	145	130,4	130,6	115,1	117,6	131	120,8	158,7	140,7	184,8	136,5	133,1
Akureyri	55,2	42,5	43,3	29,2	19,3	28,2	33	34,1	39,1	58	54,2	52,8

Heimild: www.vedur.is

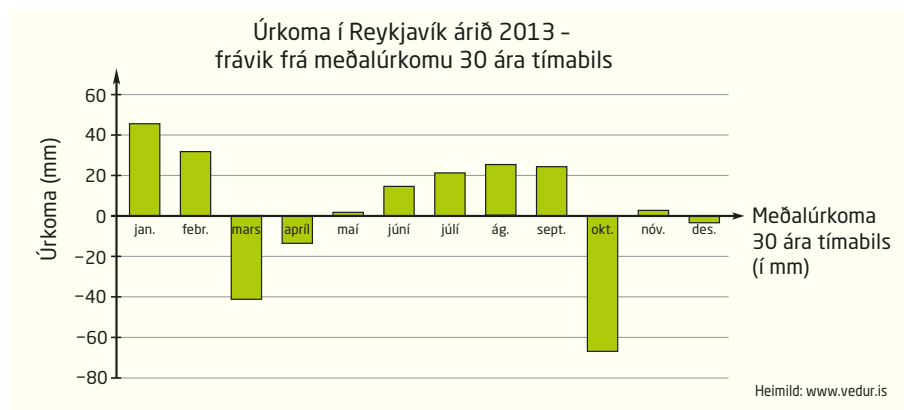
- a** Í hvaða mánuði er mesti munur á meðalúrkomu á Kirkjubæjarklaustri og á Akureyri?
- b** Hve mörgum prósentum hærri er meðalúrkoman í maí á Kirkjubæjarklaustri en á Akureyri?

4.56 Þann 7. júní 1997 varð lægsti hiti á Kirkjubæjarklaustri þann mánuð en þá komst hitinn niður í -1 °C. Þetta er 10,4 gráðum lægra en meðalhitinn í júní á tímabilinu 1961–1990.

- a** Hver var meðalhitinn á Kirkjubæjarklaustri í júní tímabilið 1961–1990? Mestur hiti í júní 1997 á Kirkjubæjarklaustri var 25,3 °C. Það varð þann 3. júní.
- b** Hver var spönn hitastigsins á Kirkjubæjarklaustri í júní 1997?
- c** Hve margir dagar liðu milli hæsta og lægsta hitastigsins í júní á Kirkjubæjarklaustri árið 1997?



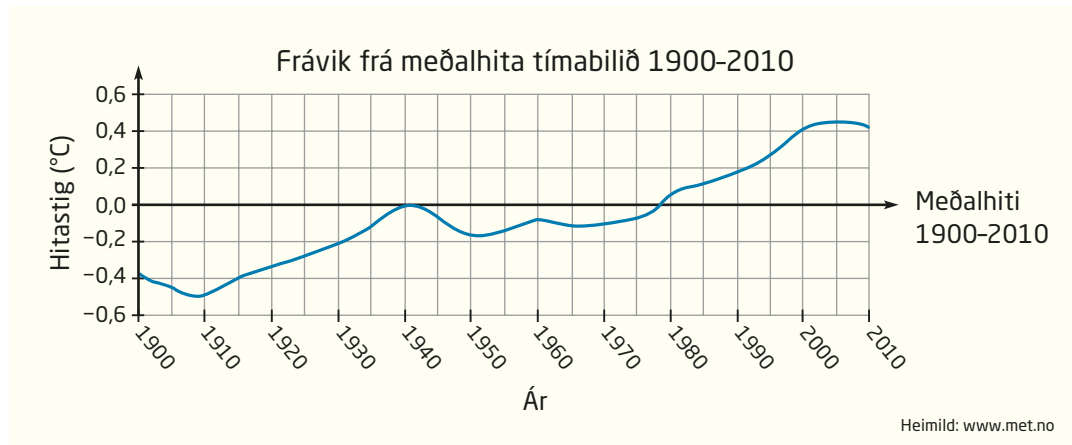
4.57 Myndritið sýnir meðalúrkomu á mánuði í Reykjavík árið 2013 mælda sem frávik frá meðalúrkomu yfir 30 ára tímabilið 1961–1990.



- Nokkrar súlnanna í myndritinu snúa niður. Hvað merkir það?
- Hvaða mánuður var næstur meðalúrkomu 30 ára tímabilsins og hvaða mánuður var lengst frá henni?
- Um það bil hversu miklu minni úrkoma en nemur meðaltali 30 ára tímabilsins féll í mars?

Við getum notað frávik frá meðalhita í umræðum um hnattræna hlýnun.

4.58 Myndritið sýnir frávik í hitastigi frá meðalhita tímabilið 1900–2010 í heiminum.



- Hve miklu heitara en meðalhiti 30 ára tímabilsins er mesta frávikið, sem skráð hefur verið, og hvaða ár var það?
- Hvaða ár var síðast skráður minni meðalhiti en meðalhiti tímabilsins 1900–2010 segir til um?

Tölfræðilegar kannanir

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

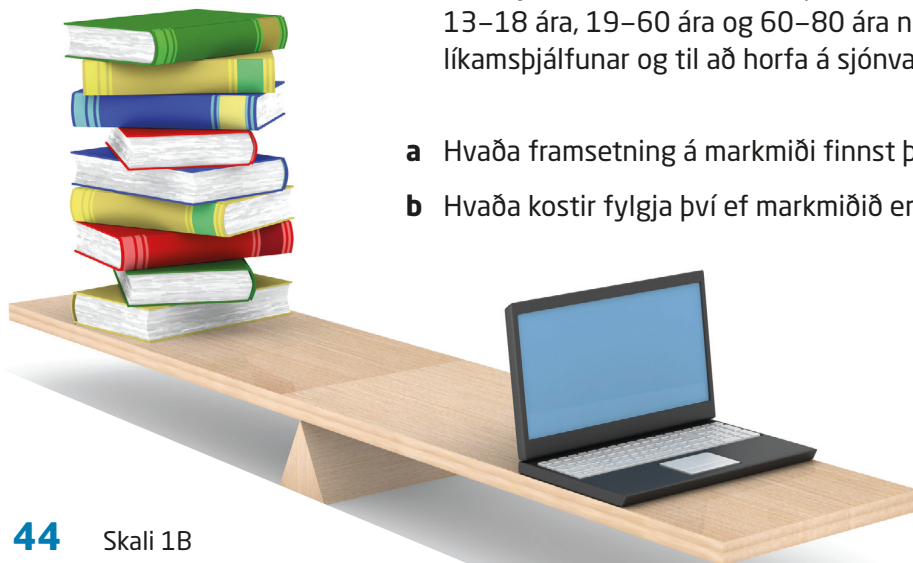
- skipuleggja tölfræðilega könnun
- kynna niðurstöður gagna á trúverðugan og skýran hátt
- leggja mat á hvort um villandi heimildir er að ræða

Hvort sem um er að ræða litla og einfalda eða stóra og viðamikla tölfræðilega könnun þarf að undirbúa hana af kostgæfni:

- 1 Hvað viltu fá að vita og hvað heldurðu að þú munir fá að vita?
- 2 Hvernig ætlar þú að safna gögnunum?
- 3 Hvernig ætlar þú að vinna úr gögnunum og framkvæma nauðsynlega útreikninga?
- 4 Hvernig getur þú lagt mat á og túlkað niðurstöðurnar sem þú munt komast að?
- 5 Hvers konar form hentar best til að kynna niðurstöðurnar?

4.59 Nemendahópur ætlar að vinna tölfræðilega könnun á daglegum venjum hjá mismunandi aldurshópum. Hópurinn leggur fram þrjár tillögur að markmiðum með könnuninni:

- 1 Við viljum finna hver munurinn er á daglegum venjum barna, unglinga, fullorðinna og eldra fólks.
 - 2 Við viljum komast að því hve mikinn tíma börn, unglingar, fullorðnir og eldra fólk notar til að lesa bækur, í netnotkun, til líkamsþjálfunar og til að horfa á sjónvarp.
 - 3 Við viljum finna mismuninn á þeim tíma sem fólk á aldrinum 6–12 ára, 13–18 ára, 19–60 ára og 60–80 ára notar til að lesa bækur, dagblöð, til líkamsþjálfunar og til að horfa á sjónvarp.
- a** Hvaða framsetning á markmiði finnst þér nákvæmust? Rökstyddu svarið.
- b** Hvaða kostir fylgja því ef markmiðið er sett fram skýrt og skilmerkilega?



Gagnasöfnun

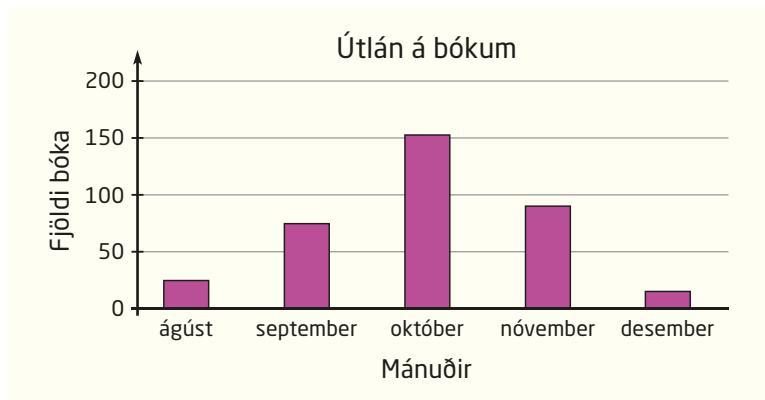
Pú getur safnað gögnum í könnun á ýmsa vegu, til dæmis:

- Pú getur gert athuganir og skráð niðurstöðurnar.
- Pú getur gert tilraunir og mælt niðurstöðurnar.
- Pú getur lagt fyrir spurningakönnun.
- Pú getur fundið upplýsingar í gagnasöfnum á netinu.

4.60 Hvaða aðferð til að safna gögnum finnst þér hæfa best ef þú ætlar að fá svör við eftirfarandi:

- Hve mörg prósent af nemendum í skólanum þínum koma of seint í skólann?
- Hvaða sjónvarpsþættir eru vinsælastir?
- Hvernig breytist suðumark vatns eftir hæð yfir sjávarmáli?
- Fellur teningur úr blýi hraðar en jafn stór teningur úr tré?
- Hvaða bíltegundir aka eftir götunni við skólann?

4.61 Myndritið sýnir fjölda útlána úr skólasafninu á haustmánuðunum.



- Hvernig er upplýsingum í þessari könnun safnað?
- Í hvaða mánuði voru útlánin flest?
- Hve mörg útlán voru skráð í október?
- Um það bil hve mörg prósent af útlánunum haustsins voru í desember?



Spurningakönnun

Opin spurning

Þátttakendur í spurningakönnun geta svarað að vild.

Lokuð spurning

Þátttakendur í spurningakönnun velja milli ýmissa svarmöguleika.

Svarendur

Þeir sem taka þátt í spurningakönnun.

Gerður og Óðinn eiga að komast að því hvaða ávöxt bekkjarskóla þeirra vilja helst hafa með sér í skólann. Óðinn stingur upp á að setja fram *opna spurningu*: Hvaða ávöxtur finnst þér bestur?

Gerður stingur upp á að setja fram *lokaða spurningu*:

Hver þessara ávaxta finnst þér bestur?

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| ☐ appelsína | ☐ banani | ☐ epli |
| ☐ kiwi | ☐ klementína | ☐ pera |

Setja má fram lokaðar spurningar á marga vegu. Eiga *svarendur* til dæmis að merkja við eitt eða fleiri svör?

Í nokkrum spurningakönnunum eiga svarendur að taka afstöðu til fullyrðingar. Svarmöguleikar geta þá til dæmis verið „sammála/ósammála“ eða settir fram í þrepaskiptum kvarða, t.d. þannig: alveg sammála – nokkuð sammála – nokkuð ósammála – alveg ósammála – veit ekki. Mismunandi er eftir rannsóknum hve margir slíkir svarmöguleikar eru á kvarðanum.

4.62 Ræddu við bekkjarskóla þína um kosti og galla opinna og lokaðra spurninga.

4.63 Tvö rannsóknarfyrirtæki rannsaka sjónvarpsvenjur fólks. Annað fyrirtækið spyr: Hvaða sjónvarpsþætti horfðir þú á í gær? Hitt fyrirtækið spyr: Hvern þessara sjónvarpsþátta horfðir þú á í gær? Eftir spurninguna var listi yfir þætti sem sýndir voru á mismunandi sjónvarpsstöðvum.

- Hver er munurinn á þessum tveimur tegundum spurninga?
- Hvor tegundin finnst þér gefa betri mynd af sjónvarpsvenjum fólks? Rökstyddu svarið.



4.64 Í nemendakönnun eru nokkrar spurningar um líðan nemenda. Ein af spurningunum er: „Líður þér vel í skólanum?“ Svarmöguleikarnir eru: líður mjög vel – líður vel – líður hvorki vel né illa – líður ekki nógu vel – líður almennt illa.

- a Hver getur verið ástæða þess að fjöldi svarmöguleika er oddatala?
- b Fyrir hvers konar spurningar telur þú að það geti verið kostur að fjöldi svarmöguleika sé slétt tala?

Í Fjallaskóla taka 140 nemendur þátt í nemendakönnun. Taflan hér fyrir neðan sýnir hve mörg prósent nemendanna krossa við hina ýmsu svarmöguleika við spurningunni: „Hvernig líður þér í skólanum?“

Svarmöguleikar Spurningar	Líður mjög vel	Líður vel	Líður hvorki vel né illa	Líður ekki nógu vel	Líður almennt illa
Líður þér vel í skólanum?	36,4%	48,6%	10,7%	2,9%	1,4%

- c Um það bil hve margir svöruðu að þeim liði mjög vel eða vel í skólanum?
- d Hvað er einn nemandi mörg prósent nemenda í Fjallaskóla?
- e Hvernig getur það haft áhrif á niðurstöður þessarar könnunar ef þrír nemendur taka ekki könnunina alvarlega og krossa bara „út í loftið“?



Kynning niðurstaðna

Pegar þú framkvæmir könnun þarftu að kynna niðurstöðurnar skýrt og greinilega. Þú þarft að íhuga hvað er mikilvægt að kynna og velja myndrit út frá því:

- 1 Hvað á titill myndritsins að segja?
- 2 Hvernig viltu fá fram hvað x-ásinn og y-ásinn sýna?
- 3 Á að skrá ákveðin heiti á súlu súluritsins eða hringgeira skífuritsins eða eiga útskýringar að vera til hliðar?
- 4 Á myndritið að sýna tíðni eða hlutfallstíðni?
- 5 Eiga súlurnar eða hringgeirarnir að vera í mismunandi litum eða mynstrum? Ef svo er – hvers vegna og hvernig?



4.65 Þú skalt vinna þetta verkefni með bekkjarfélagi þínum. Þið þurfið að ræða saman og svara spurningunum. Einnig eigið þið að rökstyðja val ykkar á myndriti fyrir hvert verkefni.

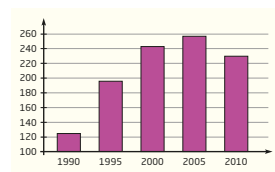
- a Hvers konar myndrit hentar best til að sýna úrkomu síðustu 30 sólarhringa á Egilsstöðum?
- b Hvers konar myndrit hentar best ef þið eigið að gefa yfirlit yfir hve margir nemendur í bekkjardeild ykkar nota hinar ýmsu stærðir af skóm?
- c Hvers konar myndrit hentar best ef þið eigið að gefa yfirlit yfir hve lengi bekkjarfélagarnir geta sippað í einni lotu?

1 m³ af olíuígildi er það magn af gasi sem gefur jafn mikla orku og 1 m³ af olíu.

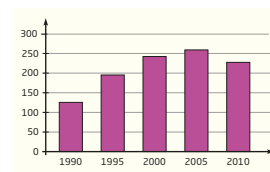
4.66 Þessi tafla sýnir framleiðslu á olíu og gasi í Noregi frá 1990 til 2010 í milljónum m³ af olíuígildum.

1990	1995	2000	2005	2010
125	196	243	257	230

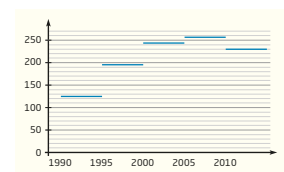
Hvaða myndrit sýnir best þróunina? Rökstyddu svarið.



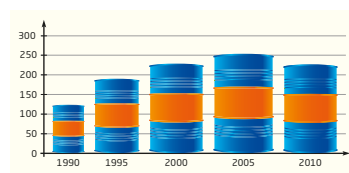
A



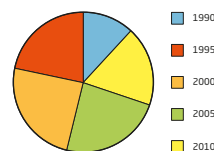
B



C



D



E

- 4.67** Þú skalt vinna þetta verkefni með bekkjarfélaga þínum. Þið ræðið hvaða aðstæður er best að sýna í súluriti, skífuriti, tröppuriti og línuriti.

Heiti myndrits	Mynd af myndritinu	Myndritið er notað við eftirfarandi aðstæður
súlurit		
skífurit		
tröppurit		
línurit		

Heimildir með villandi upplýsingum

Í tölfraðilegum könnunum getur verið um að ræða villandi upplýsingar:

- Þú skráir tölfraðilegar upplýsingar um fjarvistir nemenda við skólann þinn. Allir kennararnir eiga að senda þér yfirlit yfir fjarvistir nemenda en einhverjir þeirra gleyma því og tölurnar, sem þú færð yfir fjarvistirnar, eru þess vegna of lágar.
- Þú vilt vita eitthvað um sjónvarpsvenjur fólks og spyrð einungis þá sem eru yngri en 25 ára. Þá ertu ekki með marktækt úrtak. Ef þú spyrð aðeins fimm manns hefur þú ekki næg gögn til að alhæfa út frá.
- Þú mælir tíma og klukkan gengur ekki rétt. Þá færðu kerfisbundna villu í mælingunum.
- Þú framkvæmir spurningakönnun en 10% af svarendunum svara bara „út í hött“ án þess að þú vitir það. Þá er ekki hægt að alhæfa út frá niðurstöðunum.

Marktækt úrtak er „lítil útgáfa“ af þeim eða því sem þú ætlar að rannsaka.

Að alhæfa er að víkka niðurstöðurnar út þannig að þær gildi fyrir stærri hóp en þann sem þú rannsakar.

Kerfisbundin villa kemur upp ef allar mælingarnar gefa of lága eða of háa niðurstöðu.

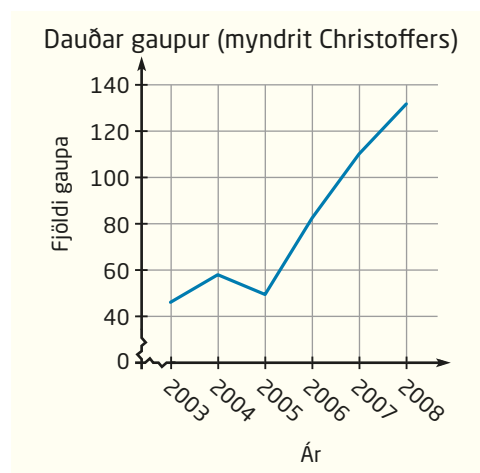
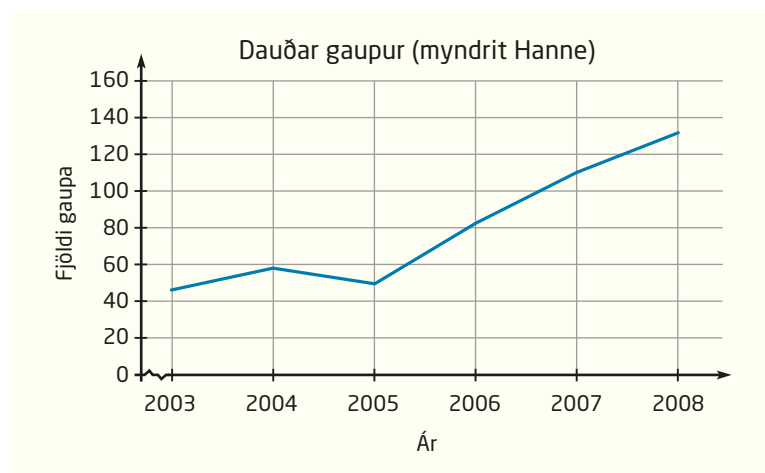
- 4.68** Fyrir kosningar gera þrjú dagblöð skoðanakönnun. Blað 1 spyr 500 manns af öllu landinu, blað 2 spyr 1000 manns af öllu landinu og blað 3 spyr 1000 manns í eigin kjördæmi.

- Hvað finnst þér að niðurstöður þessara þriggja skoðanakannana geti sagt landsmönnum?
- Hvað getur sá sem gerir tölfraðilegar rannsóknir gert til að draga úr því að hann fái villandi upplýsingar?

Blekkingar með tölfræði

Pegar við kynnum niðurstöður úr könnunum er siðlaust að reyna að blekkja þá sem lesa niðurstöðurnar. Súlur eða stöplar í myndritum eiga að hafa sömu breidd og byrja allir í núlli. Ef y-ásinn í myndritunum byrjar á hærri tölu en núlli getur maður við fyrstu sýn látist blekkjast til að trúa að eitthvað sé betra eða verra en það eiginlega er. Ef myndritið byrjar á hærri tölu en núll þarf að sýna það skýrt og greinilega til að enginn mistúlki niðurstöðurnar.

4.69 Hanne og Christoffer búa í Noregi. Þau finna upplýsingar um hve margar gaupur hafa fundist dauðar á síðustu árum. Þau sýna niðurstöðurnar í tveimur mismunandi myndritum.



- ☒ **a** Sýna myndritin sömu niðurstöður? Rökstyddu svarið.
- ☐ **b** Hvers vegna lítur út fyrir að miklu fleiri gaupur hafi drepist í öðru myndritinu? Rökstyddu svarið.
- ☐ **c** Hvort myndritið finnst þér sýna betur hinar raunverulegu niðurstöður? Rökstyddu svarið.

4.70 Búðu til myndrit sem blekkir lesendur til að trúa því að verðið á gosi hafi ekki hækkað mjög mikið frá 2010 til 2012.

Ár	2010	2011	2012
Verð á gosi (kr. á lítra)	302	330	346

Sýnidæmi 13

Ída og Jóna æfa sig í að kasta bolta langa vegalengd. Notaðu töfluna til hægri og reiknaðu út hvor þeirra stendur sig betur í þessari kastlotu.

Tillaga að lausn

Við reiknum út meðalvegalengdina fyrir báðar stelpurnar:

Meðalvegalengd Ídu:

$$\frac{30 + 28 + 29 + 27 + 29 + 13}{6} = 26$$

Meðalvegalengd Jónu:

$$\frac{26 + 25 + 26 + 27 + 25 + 27}{6} = 26$$

Í báðum lotunum er sama meðalvegalengd. En það er aðeins eitt kast sem lækkar meðalvegalengd Ídu. Er þá rétt að segja að þær séu jafn góðar í boltakasti?

Við athugum miðgildi lengdar í báðum lotunum:

Miðgildi vegalengdar Ídu:

$$\frac{28 + 29}{2} = 28,5$$

Miðgildi vegalengdar Jónu:

$$\frac{26 + 26}{2} = 26$$

Köst Ídu í þessari lotu eru betri.

Kast	Ída	Jóna
1. kast	30 m	26 m
2. kast	28 m	25 m
3. kast	29 m	26 m
4. kast	27 m	27 m
5. kast	29 m	25 m
6. kast	13 m	27 m

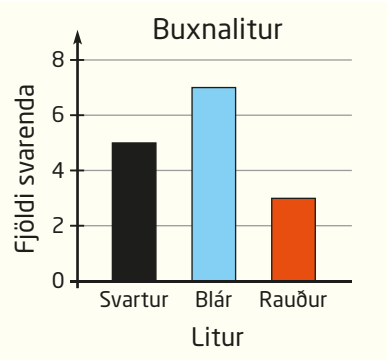
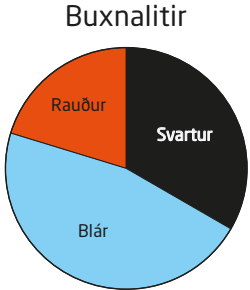
Þegar einhver gildi hafa mikil áhrif á meðaltalið getur miðgildið gefið betri mynd af miðsækninni.

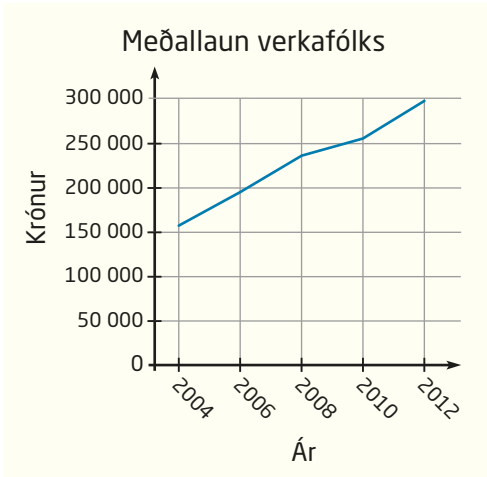
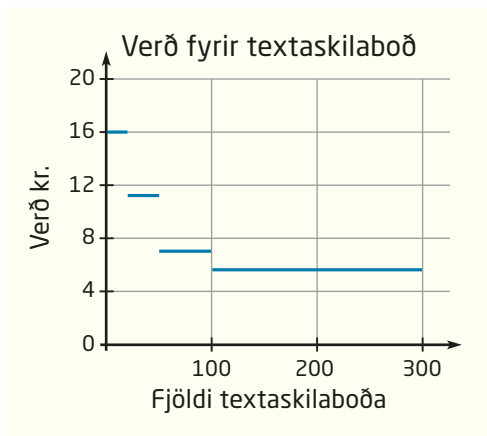
- 4.71** Árni og Jóel hlaupa 60 m fjórum sinnum. Notaðu töfluna hér fyrir neðan og finndu hvor þeirra er betri. Útskýrðu að báðir geta verið betri eftir því hvernig reiknað er.

60 metra hlaup	Árni	Jóel
1. hlaup	7,9 sek.	7,7 sek.
2. hlaup	8,5 sek.	8,1 sek.
3. hlaup	8,3 sek.	8,8 sek.
4. hlaup	8 sek.	8,1 sek.



Í stuttu máli

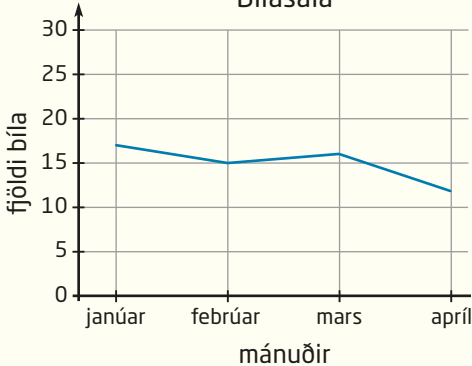
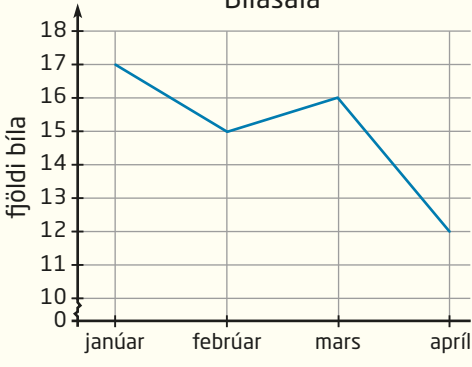
Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn												
flokkað gögn og gert tíðnitöflur Tíðnitafla er tafla sem sýnir yfirlit yfir hve oft hver breyta kemur fyrir.	Lárus kannar hvaða litur á buxum bekkjarfélögunum finnst fallegastur. B = blár; S = svartur; R = rauður. R, R, B, B, R, S, S, B, B, S, S, B, B, S, B Flokkaðu gögnin úr könnuninni í tíðnitöflu.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>buxnalitur</th><th>talning</th><th>tíðni</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>svartur</td><td> </td><td>5</td></tr> <tr> <td>blár</td><td> </td><td>7</td></tr> <tr> <td>rauður</td><td> </td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	buxnalitur	talning	tíðni	svartur		5	blár		7	rauður		3
buxnalitur	talning	tíðni												
svartur		5												
blár		7												
rauður		3												
kynnt gögn með súlurit Við notum oft súlurit til að bera saman tíðni. Súlurit er teiknað í hnitakerfi og gert úr súlum sem eru jafn breiðar. Hæð þeirra sýnir tíðnina.	Sýndu gögnin úr buxnalitakönnuninni í dæminu hér fyrir ofan í viðeigandi myndriti.	Ef þú vilt bera saman tíðnina er súlurit hentugt myndrit. 												
kynnt gögn með skífuriti Skífurit gefur yfirlit yfir hlutfallstíðni í gagnasafni. Skífurit eru oft notuð þegar menn vilja sjá hve oft breyta kemur fyrir í hlutfalli við allt gagnasafnið. Skífurit samanstendur af hring sem skipt er í hringgeira.	Sýndu gögnin úr buxnalitakönnuninni í dæminu hér fyrir ofan í viðeigandi myndriti.	Ef þú vilt sjá hve stór hluti svarenda valdi hina mismunandi buxnaliti hentar skífurit vel. 												

Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn												
kynnt gögn með línuriti Línurit er oft notað til að sýna eitthvað sem breytist eftir því sem tíminn líður. Við teiknum línurit í hnitakerfi. X-ásinn er notaður sem tímaás. Gildi breytunnar eru sýnd á y-ásnum.	Taflan hér á eftir sýnir meðallaun verkafólks á mánuði á árabílinu 2004–2012. <table><thead><tr><th>Ár</th><th>Laun</th></tr></thead><tbody><tr><td>2004</td><td>164 000</td></tr><tr><td>2006</td><td>193 000</td></tr><tr><td>2008</td><td>226 000</td></tr><tr><td>2010</td><td>255 000</td></tr><tr><td>2012</td><td>296 000</td></tr></tbody></table> Heimild: Vefur Hagstofu Íslands 3. júní 2014 Sýndu gögnin í viðeigandi myndriti.	Ár	Laun	2004	164 000	2006	193 000	2008	226 000	2010	255 000	2012	296 000	Hér á línurit vel við vegna þess að það sýnir þróun yfir ákveðið tímabil. Meðallaun verkafólks 
Ár	Laun													
2004	164 000													
2006	193 000													
2008	226 000													
2010	255 000													
2012	296 000													
kynnt gögn í tröppuriti Við notum tröppurit þegar eitthvað hefur sama gildi í langan tíma og síðan tekur gildið „stökk“ einu sinni eða oftar. Tröppurit sýnir nokkur lárétt strík sem saman líta út eins og þrep sem geta verið mislöng.	Fyrir mörgum árum fór kostnaður við að senda ein smáskilaboð eftir því hve mörg maður sendi á mánuði: <table><thead><tr><th>Fjöldi smáskilaboða</th><th>Verð (kr.)</th></tr></thead><tbody><tr><td>[1–20></td><td>16,00</td></tr><tr><td>[20–50></td><td>11,20</td></tr><tr><td>[50–100></td><td>7,00</td></tr><tr><td>[100–300></td><td>5,60</td></tr></tbody></table> Sýndu yfirlit yfir verðið í viðeigandi myndriti.	Fjöldi smáskilaboða	Verð (kr.)	[1–20>	16,00	[20–50>	11,20	[50–100>	7,00	[100–300>	5,60	Verð á textaskilaboðum lækkar í hvert sinn sem þau fara yfir ákveðinn fjölda. Þess vegna hentar vel að sýna gögnin í tröppuriti: Verð fyrir textaskilaboð 		
Fjöldi smáskilaboða	Verð (kr.)													
[1–20>	16,00													
[20–50>	11,20													
[50–100>	7,00													
[100–300>	5,60													

Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn																											
kynnt flokkaskipt gögn í stuðlariti Þegar við gerum stuðlarit fyrir flokkaskipt gögn eiga stuðlarnir að vera hver upp við annan.	Taflan hér á eftir sýnir niðurstöðurnar úr keppni 12 stelpna í kúlukasti <table><tr><th colspan="4">Lengd (m)</th></tr><tr><td>7,52</td><td>10,23</td><td>7,89</td><td>5,78</td></tr><tr><td>7,87</td><td>6,84</td><td>8,37</td><td>8,96</td></tr><tr><td>6,92</td><td>9,7</td><td>8,42</td><td>9,45</td></tr></table> Sýndu niðurstöður í viðeigandi myndriti.	Lengd (m)				7,52	10,23	7,89	5,78	7,87	6,84	8,37	8,96	6,92	9,7	8,42	9,45	Til að fá gott yfirlit yfir niðurstöðurnar röðum við þeim í flokka: <table><tr><th>Lengd (m)</th><th>Tíðni</th></tr><tr><td>[5,00–7,00></td><td>3</td></tr><tr><td>[7,00–9,00></td><td>6</td></tr><tr><td>[9,00–11,00></td><td>3</td></tr></table> Því næst setjum við upplýsingarnar í stuðlarit.: Niðurstöður úr kúlukasti Fjöldi kasta Lengd (m)	Lengd (m)	Tíðni	[5,00–7,00>	3	[7,00–9,00>	6	[9,00–11,00>	3			
Lengd (m)																													
7,52	10,23	7,89	5,78																										
7,87	6,84	8,37	8,96																										
6,92	9,7	8,42	9,45																										
Lengd (m)	Tíðni																												
[5,00–7,00>	3																												
[7,00–9,00>	6																												
[9,00–11,00>	3																												
fundið hlutfallstíðni Hlutfallstíðni er fundin með því að deila í fjölda einstakra atburða með heildarfjölda atburða.	Hve stór hluti nemenda velur hina mismunandi buxnaliti? Finndu hlutfallstíðni fyrir hvern lit. <table><tr><th>buxnalitur</th><th>talning</th><th>tíðni</th></tr><tr><td>svartur</td><td> </td><td>5</td></tr><tr><td>blár</td><td> II</td><td>7</td></tr><tr><td>rauður</td><td> </td><td>3</td></tr></table>	buxnalitur	talning	tíðni	svartur		5	blár	II	7	rauður		3	<table><tr><th>buxnalitur</th><th>tíðni</th><th>hlutfalls-tíðni</th></tr><tr><td>svartur</td><td>5</td><td>$\frac{5}{15} \approx \underline{\underline{0,33}}$</td></tr><tr><td>blár</td><td>7</td><td>$\frac{7}{15} \approx \underline{\underline{0,47}}$</td></tr><tr><td>rauður</td><td>3</td><td>$\frac{3}{15} = \underline{\underline{0,20}}$</td></tr><tr><td>alls</td><td>15</td><td>$\frac{15}{15} = \underline{\underline{1,00}}$</td></tr></table>	buxnalitur	tíðni	hlutfalls-tíðni	svartur	5	$\frac{5}{15} \approx \underline{\underline{0,33}}$	blár	7	$\frac{7}{15} \approx \underline{\underline{0,47}}$	rauður	3	$\frac{3}{15} = \underline{\underline{0,20}}$	alls	15	$\frac{15}{15} = \underline{\underline{1,00}}$
buxnalitur	talning	tíðni																											
svartur		5																											
blár	II	7																											
rauður		3																											
buxnalitur	tíðni	hlutfalls-tíðni																											
svartur	5	$\frac{5}{15} \approx \underline{\underline{0,33}}$																											
blár	7	$\frac{7}{15} \approx \underline{\underline{0,47}}$																											
rauður	3	$\frac{3}{15} = \underline{\underline{0,20}}$																											
alls	15	$\frac{15}{15} = \underline{\underline{1,00}}$																											

Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn														
notað gagnabanka til að leita að ákveðnum upplýsingum	Notaðu vef Hagstofu Íslands til að finna út hve margir fengu íslenskan ríkisborgararétt frá 2008 til 2012.	<table><tr><th>Ár</th><th>Fjöldi nýrra ríkisborgara</th></tr><tr><td>2008</td><td>914</td></tr><tr><td>2009</td><td>728</td></tr><tr><td>2010</td><td>450</td></tr><tr><td>2011</td><td>370</td></tr><tr><td>2012</td><td>413</td></tr><tr><td>alls</td><td>2875</td></tr></table> Heimild: Vefur Hagstofu Íslands 3. júní 2014 Frá 2008 til og með 2012 fengu <u>2875</u> erlendir ríkisborgarar íslenskan ríkisborgararétt.	Ár	Fjöldi nýrra ríkisborgara	2008	914	2009	728	2010	450	2011	370	2012	413	alls	2875
Ár	Fjöldi nýrra ríkisborgara															
2008	914															
2009	728															
2010	450															
2011	370															
2012	413															
alls	2875															
reiknað út gildi sem sýna miðsækni á þrjá mismunandi vegu (með meðaltali, miðgildi og tíðasta gildi)	Taflan hér á eftir sýnir hvað Friðþjófur hoppaði hátt í keppni í hástökki sem hann tók þátt í. <table><tr><th colspan="2">Hæð (m)</th></tr><tr><td>1,45</td><td>1,48</td></tr><tr><td>1,52</td><td>1,55</td></tr><tr><td>1,48</td><td></td></tr></table> Finndu – hæðina sem Friðþjófur stökk að meðaltali – miðgildið fyrir stökk Friðþjófs – tíðasta gildið í stökkum Friðþjófs	Hæð (m)		1,45	1,48	1,52	1,55	1,48		$\frac{1,45 + 1,52 + 1,48 + 1,48 + 1,55}{5} \approx 1,50$ <u>Meðalhæðin er 1,50 m.</u> Þar sem fjöldi niðurstaðna er oddatala er miðgildið talan í miðjunni: 1,45, 1,48, 1,48, 1,52, 1,55 <u>Miðgildið fyrir hæðina er 1,48 m.</u> <u>Tíðasta gildið er 1,48 m.</u>						
Hæð (m)																
1,45	1,48															
1,52	1,55															
1,48																

Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn
reiknað út gildi sem sýnir dreifingu	Reiknaðu út spönn hoppa Friðþjófs í hástökki í dæminu á fyrri blaðsíðu.	Spönnin er mismunurinn á hæsta og lægsta hoppinu: $1,55 - 1,45 = 0,10$ <u>Spönnin er 0,10 m.</u>
borið gögn saman með því að skoða meðaltöl	Blóðþrýstingur er mældur í mm kvikasilfus (mm Hg) með tveimur tölum sem gefa upp þrýstinginn þegar hjartað dregst saman (efri mörk) og þegar hjartað slappar af (neðri mörk). Meðaltalið er um það bil 120/80. Berðu blóðþrýsting Pórs, sem er 110/65, og Maríu, sem er 150/90, saman við meðaltalið.	Efri mörk blóðþrýstings Pórs eru (120 – 110) mm Hg = 10 mm Hg lægri en meðaltalið. Neðri mörk hans eru (80 – 65) mm Hg = 15 mm Hg lægri en meðaltalið. <u>Pór er með lægri blóðþrýsting en nemur meðaltalinu.</u> Efri mörk Maríu eru (150 – 120) mm Hg = 30 mm Hg hærri en meðaltalið. Neðri mörk hennar eru (90 – 80) mm Hg = 10 mm Hg hærri en meðaltalið. <u>María er með hærri blóðþrýsting en nemur meðaltalinu.</u>
undirbúið tölfræðilega athugun 1 Hvað viltu finna út og hvað heldurðu að þú munir finna út? 2 Hvernig ætlar þú að safna gögnum? 3 Hvernig ætlar þú að vinna úr gögnunum og framkvæma nauðsynlega útreikninga? 4 Hvernig getur þú lagt mat á og túlkað niðurstöðurnar sem þú færð? 5 Hvers konar kynning á niðurstöðum hentar best?	Undirbúðu könnun til að finna hve margir farþegar eru í bílunum sem aka fram hjá skólanum þínum að morgni.	1 Tilgangurinn með könnuninni er að ganga úr skugga um hve margir aka einir í bíl. Við gerum ráð fyrir að finna að tíðasta gildið verði 0 farþegar. 2 Við söfnum upplýsingum um fjölda farþega í 30 bílum einn morgun rétt fyrir skólabyrjun. 3 Við flokkum gögnin, búum til tíðnitöflu og reiknum út gildi sem sýna miðsækni. 4 Við leggjum mat á og túlkuð niðurstöðurnar. 5 Við kynnum niðurstöðurnar í súluriti og reiknum miðgildi, meðaltal og tíðasta gildi fyrir fjölda farþega.

Pú átt að geta	Dæmi	Tillaga að lausn																														
kynnt niðurstöður á trúverðugan og skýran hátt	Taflan hér á eftir sýnir hve marga bíla bílasali nokkur seldi í janúar, febrúar, mars og apríl. <table><thead><tr><th>Mánuður</th><th>Fjöldi seldra bíla</th></tr></thead><tbody><tr><td>janúar</td><td>17</td></tr><tr><td>febrúar</td><td>15</td></tr><tr><td>mars</td><td>16</td></tr><tr><td>apríl</td><td>12</td></tr></tbody></table> Hvernig getur myndritið, sem bílasalinn notar til að sýna að hann hafi selt marga bíla síðustu mánuði, litið út? Hvernig getur myndritið, sem samkeppnisaðilinn hefði viljað sjá, litið út?	Mánuður	Fjöldi seldra bíla	janúar	17	febrúar	15	mars	16	apríl	12	Bílasala <table><thead><tr><th>mánuðir</th><th>fjöldi bíla</th></tr></thead><tbody><tr><td>janúar</td><td>17</td></tr><tr><td>febrúar</td><td>15</td></tr><tr><td>mars</td><td>16</td></tr><tr><td>apríl</td><td>12</td></tr></tbody></table> Bílasala <table><thead><tr><th>mánuðir</th><th>fjöldi bíla</th></tr></thead><tbody><tr><td>janúar</td><td>17</td></tr><tr><td>febrúar</td><td>15</td></tr><tr><td>mars</td><td>16</td></tr><tr><td>apríl</td><td>12</td></tr></tbody></table>	mánuðir	fjöldi bíla	janúar	17	febrúar	15	mars	16	apríl	12	mánuðir	fjöldi bíla	janúar	17	febrúar	15	mars	16	apríl	12
Mánuður	Fjöldi seldra bíla																															
janúar	17																															
febrúar	15																															
mars	16																															
apríl	12																															
mánuðir	fjöldi bíla																															
janúar	17																															
febrúar	15																															
mars	16																															
apríl	12																															
mánuðir	fjöldi bíla																															
janúar	17																															
febrúar	15																															
mars	16																															
apríl	12																															
áttað þig á villandi upplýsingum	Farþegakönnunin á blaðsíðunni á undan sýndi að 2,6 farþegar voru í bíl að meðaltali. Tíðasta gildi var 2 farþegar. Hver getur ástæðan verið til að tíðasta gildið er stærra en tilgátan var í upphafi? Hvernig hefðum við getað gert betri könnun?	Könnunin var gerð um morguninn rétt fyrir skólabyrjun. Þetta hefur áhrif á niðurstöðurnar vegna þess að foreldrarnir óku börnum sínum í skólann og þess vegna voru margir farþegar í hverjum bíl.																														

Bættu þig!

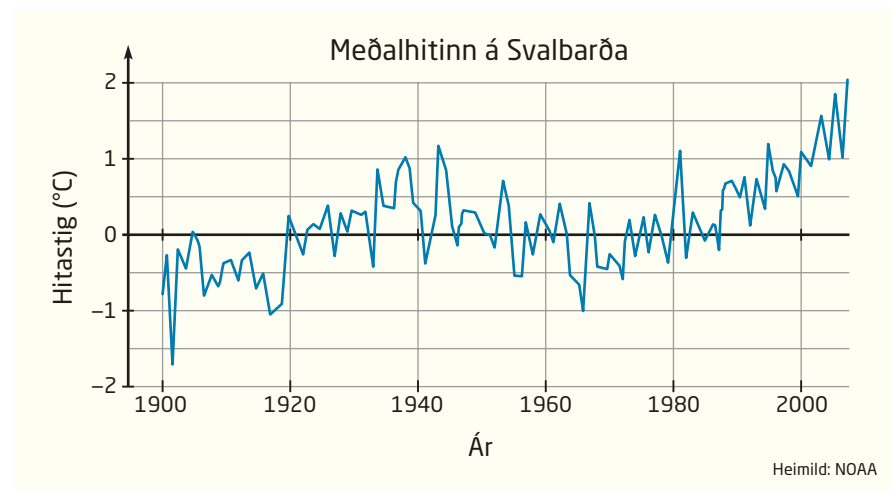
Kynning á niðurstöðum

4.72 Marta skrifar grein um hjólabrettaþróttina og vill vita hvort hún skrifar fjölbreytt mál eða hvort hún endurtekur mörg orð. Hún taldi því nokkur orð í textanum og fékk þessar niðurstöður.

Orð	Tíðni	Orð	Tíðni	Orð	Tíðni
hjólabretti	18	það	11	þrír sextíu, rampur	6
þú	15	„kickflip“, flip	10	„trikk“, spinna	5
sem, og, er,	14	„ollí“, „heelflip“	8	gráður, tekur, samtímis	4

- Sýndu yfirlitið yfir orðin hér á undan í viðeigandi myndriti.
- Fjarlægðu orðin sem tengjast ekki beinlínis snjóþóttum. Búðu til töflu og sýndu yfirlitið í viðeigandi myndriti.

4.73 Myndritið hér fyrir neðan sýnir meðalhita á Svalbarði.



- Hvaða ár varð meðalhitinn fyrst hærri en 0 °C?
- Hvaða ár var meðalhitinn lengst frá 0 °C?
- Hvaða ár var mestur kuldi að meðaltali?
- Hvaða ár var mestur hiti að meðaltali?

4.74 Taflan til hægri sýnir magn blandaðs heimilissorps á hvern íbúa á Íslandi á árabílinu 1995–2011.

- a Sýndu í súluriti hve mikið sörp kemur frá hverjum íbúa árin sem tilgreind eru í töflunni.
- ☒ b Hve miklu meira sörp kemur frá hverjum íbúa árið 1995 en 2011?
- ☐ c Í lok ársins 2011 voru um það bil 319 600 íbúar á Íslandi. Hve mörgum tonnum af blönduðu heimilissorpi var kastað það ár?
- ☐ d Hve miklu magni af blönduðu heimilissorpi heldur þú að hafi verið kastað árið 2012 miðað við sömu þróun? Athugaðu á heimasíðu Hagstofu Íslands hver hin raunverulega tala er.

Ár	Kíló af sorpi á hvern íbúa
1995	407
1998	370
2003	244
2008	232
2009	201
2010	173
2011	160

Heimild: Vefur Hagstofu Íslands.

- 4.75**
- a Notaðu töfluna til hægri til að búa til tröppurit yfir sektir fyrir hraðaakstur í hverfi þar sem leyfilegur hámarkshraði er 30 km/klst.
 - ☒ b Hve háar verða sektir þriggja ökumanna sem aka á hraðanum 37 km/klst., 42 km/klst. og 51 km/klst.?
 - ☐ c Fimm ökumenn fá samtals í sekt 65 000 kr.
Hvað er hver sekt há?
Hve hratt hafa þeir getað ekið?
 - ☐ d Við radarmælingar á svæði þar sem hámarkshraði er 30 km/klst. mældist hraði 12 bíla þessi:

Ökuhraði þar sem er 30 km hámarkshraði	Sekt (kr.)
[30–36>	0
[36–41>	5000
[41–46>	10 000
[46–51>	15 000
[51–56>	20 000

Heimild: Vefur Samgöngustofu sumarið 2014.

28,1 35,5 29,5 34,2 40,9 31,3 28,4 36,5 25,2 47,8 35,5 19,3

Hve háar eru sektirnar alls fyrir þennan akstur?



Greining og útreikningar

4.76 Sara gerir yfirlit yfir fjölda blaðsíðna sem hún les í fjórar vikur:

Vika	mán.	þri.	mið.	fi.	fös.	lau.	su.
42	10	2	15	19	0	15	0
43	8	12	0	17	11	0	12
44	13	22	6	14	18	22	10
45	14	19	20	5	17	11	192

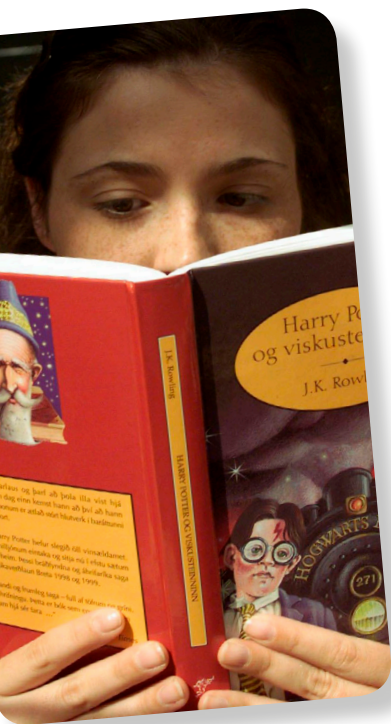
- Notaðu töflureikni og finndu hve margar blaðsíður Sara las alls.
- Hve margar blaðsíður las hún að meðaltali á dag?
- Finndu spönn blaðsíðufjöldans, miðgildi og tíðasta gildi.

4.77 Bekkjardeild með 22 nemendum gerði samning við kennarann sinn um að þeir fengju að fara í tveggja daga ferðalag ef þeir læsu 10 000 blaðsíður á fjórum vikum.

- Ef allir nemendur leggja jafn mikið af mörkum – hve margar blaðsíður þarf hver þeirra að lesa?
- Taflan hér á eftir sýnir hve margar blaðsíður hver nemandi hafði lesið eftir þrjár vikur.
Hve margar blaðsíður á öll bekkjardeildin eftir að lesa síðustu vikuna?

Fjöldi blaðsíðna sem hver nemandi hefur lesið										
226	250	450	128	322	462	834	125	257	471	267
334	572	357	489	211	126	411	191	89	128	244

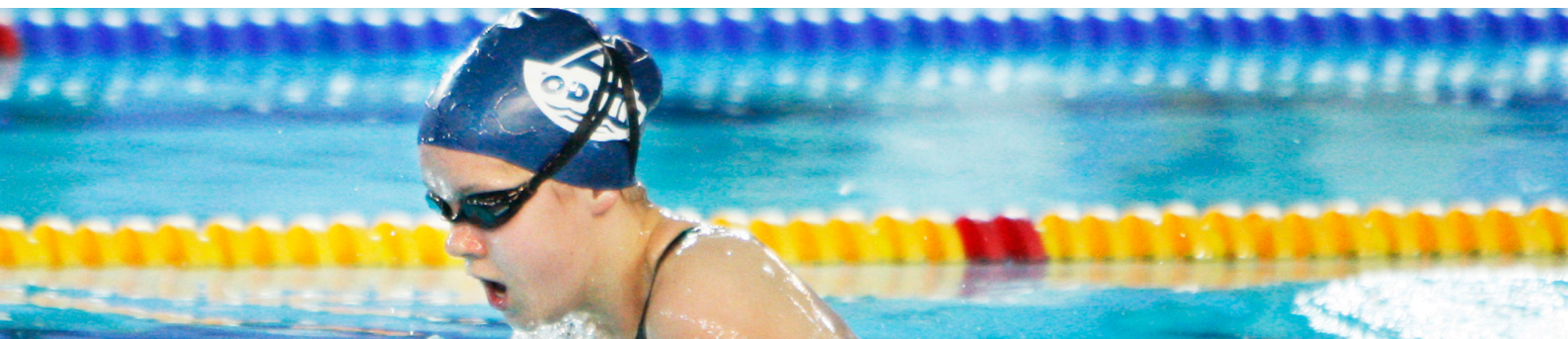
- Finndu spönn fyrir fjölda blaðsíðna sem nemendur lásu fyrstu þrjár vikurnar.
- Nemendur náðu markmiði sínu nákvæmlega. Hve stór hluti af blaðsíðunum var lesinn síðustu vikuna?
- Finndu miðgildi fyrir fjölda blaðsíðna sem nemendur lásu fyrstu þrjár vikurnar.
- Gerðu tillögu um hve margar blaðsíður hver og einn þarf að lesa síðustu vikuna til að ná markmiðinu nákvæmlega. Finndu spönnina.
- Hve margar blaðsíður þarf hver að lesa að meðaltali síðustu vikuna?
- Sá sem las mest las 990 blaðsíður. Sá sem las minnst las 110 blaðsíður. Hve mörgum prósentum meira las sá sem las mest en sá sem las minnst?



- 4.78** Sædís þjálfar bringusund. Hún gerði skrá yfir bestu tímana sem hún náði í hverjum mánuði á síðasta ári:

Mánuður:	mars	apríl	maí	júní	júlí	ágúst
Tími (sek.):	39,35	38,67	38,07	37,45	37,10	36,78
Mánuður:	september	október	nóvember	desember	janúar	febrúar
Tími (sek.):	36,50	36,10	35,62	34,93	33,28	32,20

- Sýndu í viðeigandi myndriti hvernig árangur Sædísar hefur þróast.
- Finndu meðaltíma bestu tímanna síðustu sex mánuðina.
- Ef þróunin heldur áfram hér eftir sem hingað til – hve langur tími mun líða þar til Sædís syndir vegalengdina á um það bil 30 sekúndum?
- Hve lengi heldur þú að það sé raunhæft að Sædís haldi áfram að bæta árangur sinn með þessu áframhaldi?



- 4.79** Magnús hefur áhuga á að vita hve margir lesa bloggið hans á degi hverjum.

- Frá 1. til 31. mars fékk hann 7296 heimsóknir á bloggsíðuna sína. Hve margar voru heimsóknir hans að meðaltali á dag á þessu tímabili?
- Hver gestur notaði að meðaltali 57 sekúndur á bloggsíðunni. Hve marga klukkutíma notuðu gestir síðunnar samtals?
- 5% af lesendum komu á bloggsíðuna gegnum „bókamerki“ og þess háttar. Frá öðrum síðum komu 59% gesta og 36% leituðu að orðum og lentu á blogginu. Gerðu skífurit sem sýnir hvernig gestirnir fundu bloggsíðuna.
- Taflan til hægri gefur yfirlit yfir mismunandi vafra sem voru notaðir til að lesa bloggið. Hve mörg prósent notuðu „aðra vafra“?
- Sýndu skýrt og greinilega í skífuriti hvaða vafrar voru notaðir.

Vafri	hlutfall (%)
Firefox	42, 2
Internet Explorer	33, 2
Safari	10, 4
Opera	6, 7
Chrome	4, 6
aðrir	?

Tölfræðilegar kannanir

- 4.80** Búðu til spurningakönnun um hve miklum tíma er varið í samfélagsmiðla. Spurðu bekkjarfélaga þína. Reiknaðu út og sýndu niðurstöðurnar í viðeigandi myndriti.
- 4.81** Notaðu heimasíðu Veðurstofu Íslands.
- a** Finndu spönn hitastigs og úrkomu dagsins í dag á Íslandi.
 - b** Finndu spönn hitastigs og úrkomu dagsins í dag, síðasta mánaðar og síðasta árs þar sem þú býrð.
- 4.82** Notaðu upplýsingar á heimasíðu Hagstofu Íslands um kvikmyndahús og gesti þeirra:
- a** Finndu hve marga kvikmyndaheimsóknir á íbúa voru á mismunandi landsvæðum á Íslandi árið 2012.
 - b** Settu upplýsingarnar fram í viðeigandi myndriti.
- 4.83** Mældu hve langt bekkjarfélagar þínir geta stökkið í langstökki án atrennu.
-  **a** Notaðu töflureikni og gerðu yfirlit yfir hve langt bekkjarfélagarnir stökkva.
 -  **b** Veldu breidd á flokka og skráðu niðurstöðurnar í töflu.
 -  **c** Sýndu niðurstöðurnar í stuðlariti (ekkert bil á milli stuðlanna).



Þjálfaðu hugann

- **4.84** Í bekkjardeild nokkurri eru 20 nemendur. Níu af þeim eiga systur og 10 af þeim eiga bróður. Fimm nemendanna eiga engin systkini. Hve margir þeirra eiga bæði bróður og systur?

- **4.85** Taflan til hægri sýnir tíma þeirra fimm bestu í hlaupi stúlkna. Aðrir þátttakendur en þær fimm bestu fengu viðurkenningu ef hlaupahraði þeirra var undir tímamörkum sem voru fundin með því að bæta 25% við meðaltíma hinna fimm bestu. Hve hratt þurftu þátttakendur að hlaupa til að fá viðurkenningu?

Tími
1 klst. 24 mín. 12 sek.
1 klst. 25 mín. 10 sek.
1 klst. 26 mín. 8 sek.
1 klst. 30 mín. 53 sek.
1 klst. 33 mín. 37 sek.



- **4.86** Þann 1. júní 2011 var meðalaldur 33 kennara í skóla nokkrum 47 ár. Þann 31. maí 2012 hættu þrír kennarar, sem voru 65 ára, 58 ára og 62 ára. Í staðinn voru strax ráðnir fjórir nýir kennarar en þeir voru 24 ára, 31 árs, 26 ára og 28 ára. Hver var meðalaldur kennara í þessum skóla þann 1. júní 2012? Námunnaðu meðalaldurinn að næsta heila ári.



Algebra og jöfnur

Í algebru og reikningi með jöfnum er bæði reiknað með tölum og bókstöfum. Reiknireglurnar eru þær sömu og gilda fyrir venjulegan talnareikning en í algebru fáum við ekki alltaf svar í tölum. Þú átt að læra að uppgötva, sjá og lýsa mynstri úr tölum og bókstöfum.

Stærðfræðiorð

mynstur
myndtölur
formúla
ferningstala
jafna
fasti
breyta
algebrustæða

?

Keilurnar í keiluspili mynda þríhyrning. Tíu keilum er raðað í fjórar raðir, þannig: $1 + 2 + 3 + 4$ keilur.

Hve margar keilur þarftu ef þú átt að raða keilum í risakeiluspili með 50 röðum?

Að rannsaka mynstur

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- bera kennsl á mynstur í myndum og tölum
- halda áfram með mynstur
- útskýra með orðum, formúlum og táknum hvernig mynstur er byggt upp

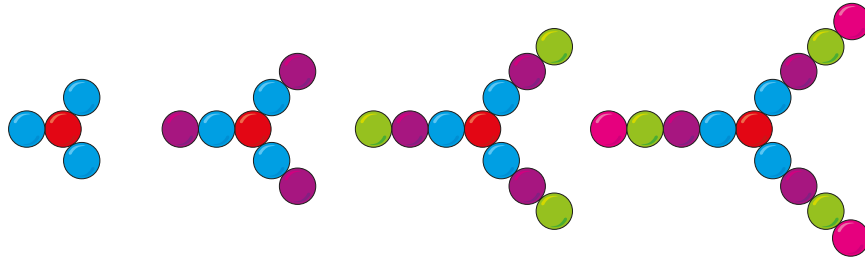
Myndtölur

Sá fjöldi eininga sem mynd er sett saman úr.

Pegar þú rannsakar mynstur skaltu athuga hvernig myndir, sem búnar eru til úr pinnum, kubbum, strikum o.s.frv., mynda ákveðið mynstur. Þegar þú telur, úr hve mörgum hlutum hver mynd er, muntu uppgötva að tölurnar mynda mynstur. Við köllum þessar tölur *myndtölur*. Tölur, sem koma hver á eftir annarri í ákveðinni röð, kallast talnaruna.

Sýnidæmi 1

Myndirnar hér fyrir neðan líkjast hver annarri. Með hverri nýrri mynd þarf fleiri hringi.



Mynd 1

Mynd 2

Mynd 3

Mynd 4

- Lýstu hvernig þú getur búið til næstu mynd út frá myndinni á undan.
- Skrifaðu myndtölurnar hverja á eftir annarri eins og talnamynstur í talnarunu.

Tillaga að lausn

- Fyrsta myndin er gerð úr 1 hring í miðjunni og 3 hringjum í kring. Hringirnir eru 4 alls.

Með hverri nýrri mynd bætast 3 nýir hringir við myndina á undan, 1 hringur á hvern „arm“.



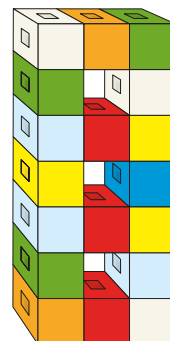
- b** Það eru 4 hringir í mynd 1, 7 hringir í mynd 2, 10 hringir í mynd 3 og 13 hringir í mynd 4. Hver tala er 3 stærri en talan á undan.

Myndtölurnar mynda talnamynstrið 4, 7, 10, 13.

5.1

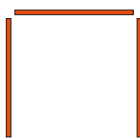
Þóra býr til turn úr kubbum eins og myndin til hægri sýnir. Þessi turn er þrjár hæðir og í honum eru 18 kubbar. Telja má hæðirnar með því að telja „göt“ neðan frá og upp.

- a** Finndu myndtölur fimm fyrstu hæðanna.
b Hve margar hæðir getur Þóra byggt með 100 kubbum? Útskýrðu hvernig þú fannst svarið.

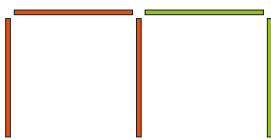


5.2

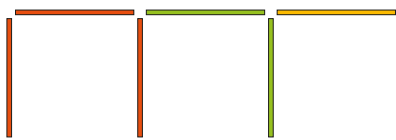
Skoðaðu myndirnar hér á eftir sem búnar eru til með pinnum.



Mynd 1



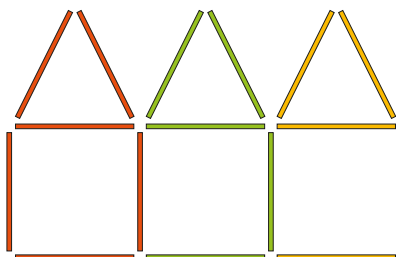
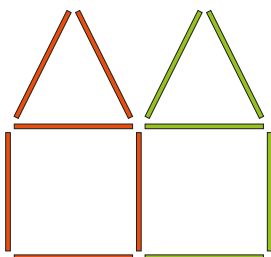
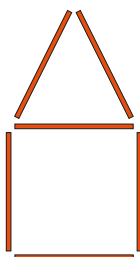
Mynd 2



Mynd 3

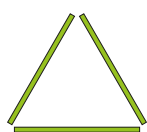
- a** Gerðu töflu, svipaða þeirri sem er hér til hægri, og skrifaðu myndtölur fyrir myndir nr. 1–6. Þú getur teiknað eða búið til myndirnar til að vera viss um að þær verði réttar.
b Finndu myndtölu myndar nr. 10.
c Skrifaðu með orðum hvernig þú finnur myndtölu ákveðinnar myndar.
d Á myndirnar hér fyrir ofan er sett „þak“ með pinnum. Gerðu nýja töflu með nýja fjöldanum. Útskýrðu nýja talnamynstrið með orðum.

Mynd nr.	Fjöldi pinna = myndtalan
1	4
2	
3	



Sýnidæmi 2

Myndirnar eru búnar til með pinnum. Ef þú telur hve margir pinnar eru í hverri mynd muntu komast að raun upp að myndtölurnar mynda mynstur.



Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3

Búðu til töflu og fylltu út í hana með myndtölum fyrir myndir númer 1, 2, 3 og 4.

Tillaga að lausn

Þegar þú telur hve margir pinnar eru í myndum númer 1, 2, 3 og 4 sérðu að fylla má töfluna út þannig:

Mynd nr.	tákn	myndtala
1	m_1	3
2	m_2	5
3	m_3	7
4	m_4	9

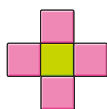
Myndtala nr. 1 er oft skráð sem m_1 . Tölustafurinn 1 í *tákninu* kallast lágvísir. Táknid m_1 er lesið „emm einn“.

Myndtalan stækkar um 2 með hverri nýrri mynd.

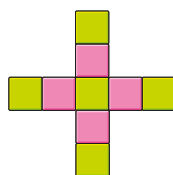
Tákn

Til dæmis bókstafur sem er notaður til að auðveldara sé að skrá stærðfræðilega hugsun á skýran og skilmerkilegan hátt.

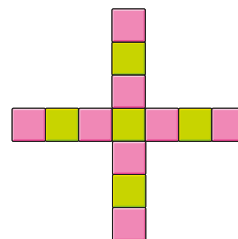
5.3 Myndtala myndar númer 1 er 5 vegna þess að 5 kubbar eru í myndinni, $m_1 = 5$.



Mynd 1



Mynd 2

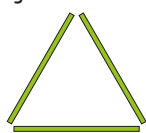


Mynd 3

- Finndu myndtölur mynda nr. 2, 3 og 4. Notaðu táknin, m_2 , m_3 og m_4 .
- Hugsaðu þér að þú vitir myndtölu ákveðinnar myndar í þessu mynstri. Skrifðu með orðum hvernig þú getur fundið næstu myndtölu.
- Þú færð að vita að $m_{15} = 61$. Finndu m_{16} .

Sýnidæmi 3

Í sýnidæmi 2 voru þessar pinnamyndir. Myndtölurnar standa undir hverri mynd.



$$m_1 = 3$$



$$m_2 = 5$$



$$m_3 = 7$$

Látum n tákna hvaða myndnúmer sem er. Skrifaðu *formúlu* fyrir myndtölu númer n , það er m_n .

Tillaga að lausn

Mynd nr.	Fjöldi pinna = myndtalan
1	$m_1 = 3 = 2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
2	$m_2 = 5 = 4 + 1 = 2 \cdot 2 + 1$
3	$m_3 = 7 = 6 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$
4	$m_4 = 9 = 8 + 1 = 2 \cdot 4 + 1$

Ef þú skrifar myndtölurnar eins og gert er í töflunni hér fyrir ofan sérðu að myndtala ákveðinnar myndar er 2 sinnum myndnúmerið plús 1. Þá verður formúlan fyrir fjölda pinna í mynd n þessi:

$$m_n = 2 \cdot n + 1$$

Myndnúmer segir til um hvar myndin stendur í myndaröðinni.

Formúla er regla, sett fram með tölum og táknum, sem lýsir stærðfræðilegu samhengi.

5.4 Lýstu talnamynstrunum með orðum og finndu m_5 og m_6 í hverju talnamynstri. Mundu að kalla fyrstu myndtöluna í talnarununni, m_1 .

a 1, 5, 9, 13, ...

b 10, 20, 30, 40, ...

c 1, 4, 9, 16, ...

d 100, 98, 96, 94, ...

e 2, 7, 12, 17, ...

f 5, 15, 25, 35, ...

g 1, 2, 4, 7, ...

h 1001, 995, 989, 983, ...

i 1, 9, 25, 49, ...

j 1, 3, 6, 10, ...

k 2, 10, 50, 250, ...

l 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...

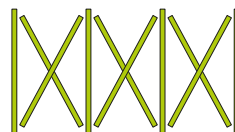
5.5 Hér sérðu þrjár fyrstu þrjár myndirnar í mynstri.



Mynd 1



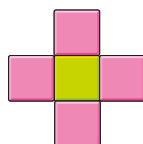
Mynd 2



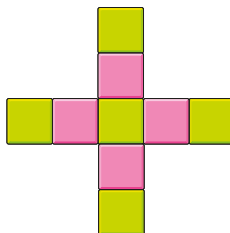
Mynd 3

- Teiknaðu tvær næstu myndir.
- Búðu til töflu með myndnúmerum og myndtölum fyrir fimm fyrstu myndirnar.
- Skráðu formúlu fyrir myndtölurnar með orðum eða táknum.

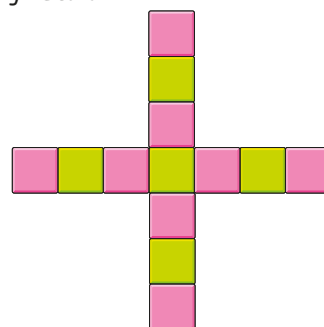
5.6 Undir hverri mynd stendur myndnúmerið og myndtalan.



$m_1 = 5$



$m_2 = 9$



$m_3 = 13$

- Hvernig getur þú fundið m_{20} án þess að reikna út 19 fyrstu myndtölurnar?
- Búðu til formúlu fyrir m_n og reiknaðu út m_{80} .
- Búðu til formúlu fyrir m_n . Finndu n þegar $m_n = 121$.

5.7 Veldu þrjú af talnamynstrunum hér á eftir og búðu til setningu eða formúlu sem lýsir þeim.



a 1, 5, 9, 13, ...



c 1, 2, 4, 7, 11, ...



e 2, 10, 50, 250, ...



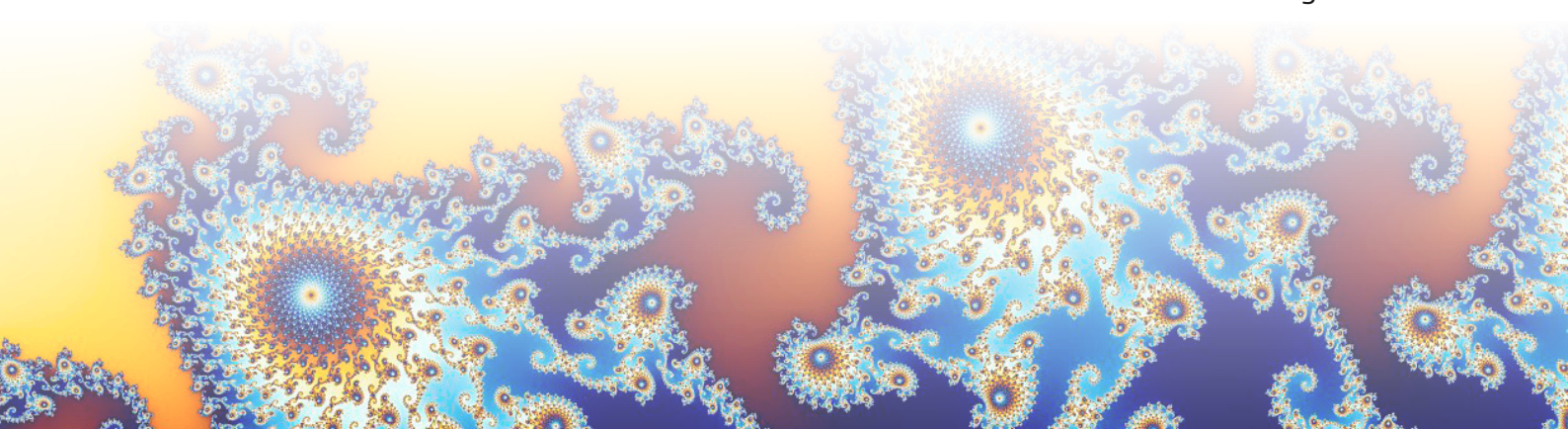
b 1, 4, 9, 16, ...



d 100, 98, 96, 94, ...



f $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$



Mismunandi formúlur fyrir sama mynstur

Tvær manneskjur, sem sjá mynstur, geta lýst því á mismunandi vegu. Þess vegna geta formúlur fyrir sama mynstrið verið ólíkar. Ef formúlurnar lýsa sama mynstrinu hljóta svörin að verða eins þegar myndtölurnar eru reiknaðar.

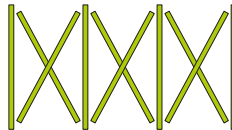
Rúnar á að setja upp girðingu eftir mynstrinu hér fyrir neðan. Stígur og Garðar eiga að hjálpa Rúnari að búa til formúlu fyrir þann fjölda borða sem hann þarf í girðinguna.



Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3

Stígur reiknar svona:

$$m_1 = 2 + 2 = 2 \cdot 1 + (1 + 1) = 4$$

$$m_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 2 \cdot 2 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7$$

$$m_3 = 2 \cdot 3 + 4 = 2 \cdot 3 + (3 + 1) = 6 + 4 = 10$$

„Þú átt að margfalda myndnúmerið með 2 og bæta við einum meira en myndnúmerið.“

$$\underline{\underline{m_n = 2 \cdot n + (n + 1)}}$$

Í hverri einingu girðingarinnar er kross úr 2 borðum. Þar að auki koma tvö lóðrétt borð. Þau eru alltaf einum fleiri en myndnúmerið.



Garðar hugsar svona:

$$m_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$m_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$m_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

„Þú átt að margfalda myndnúmerið með 3 og bæta 1 við.“

$$\underline{\underline{m_n = 3 \cdot n + 1}}$$

Hver eining girðingarinnar er úr 3 borðum:

Þar að auki á að vera eitt borð í endann.



Rúnar á að nota 17 einingar í girðinguna.

Hann prófar báðar formúlur til vonar og vara:

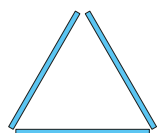
Formúla Stígs gefur þetta svar: $m_{17} = 2 \cdot 17 + 18 = 34 + 18 = 52$

Formúla Garðars gefur þetta svar: $m_{17} = 3 \cdot 17 + 1 = 51 + 1 = 52$

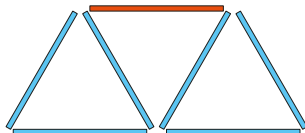
Rúnar þakkar Stíg og Garðari fyrir hjálpina og sagar til 52 borð.

5.8 Skoðaðu þessa þríhyrninga sem gerðir eru úr pinnum.

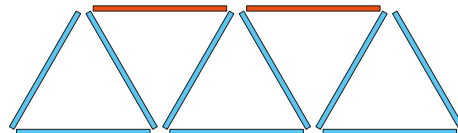
Aðferð 1



Mynd 1

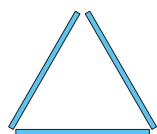


Mynd 2

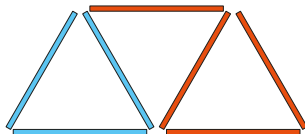


Mynd 3

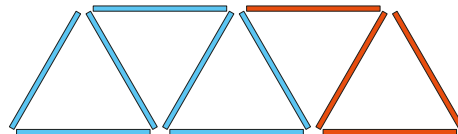
Aðferð 2



Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3

- a** Reiknaðu út m_4 , það er hve margir pinnar eru í mynd 4.
- b** Skoðaðu myndirnar í aðferðunum tveimur og búðu til setningar sem lýsa því hvernig myndirnar eru byggðar upp. Búðu til eina setningu fyrir aðferð 1 og aðra fyrir aðferð 2.
- c** Notaðu setningarnar, sem þú bjóst til í b-lið, til að reikna út m_{10} . Útskýrðu hvers vegna setningarnar gefa sama svar.
- d** Hve marga pinna þarf til að búa til allar 10 fyrstu myndirnar?
- e** Búðu til formúlur fyrir fjölda pinna í mynd n , það er m_n . Búðu til formúlu fyrir aðferð 1 og aðra fyrir aðferð 2.
- f** Notaðu formúlurnar, sem þú bjóst til í e-lið til að reikna út m_{10} . Útskýrðu hvers vegna formúlurnar gefa sama svar.
- g** Hvaða númer hefur stærsta myndin sem þú getur búið til með 100 pinnum?
- h** Hve margar myndir getur þú búið til frá mynd 1 og áfram ef þú mátt nota samtals 100 pinna í allar myndirnar?

Myndtölur

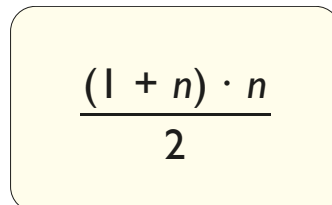
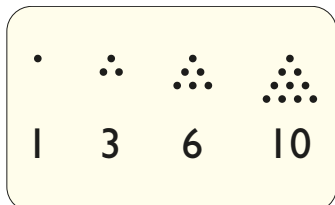
Spilið er fyrir þrjá eða fjóra leikmenn.

Þið þurfið

- Myndtöluspjöld (verkefnablað 1.5.1.)

Aðferð

- 1 Stokkaðu spjöldin vel. Leggðu þau á hvolf á borðið.
- 2 Dragðu eitt spjald í einu og leggðu þau upp, hlið við hlið á borðið.
- 3 Ef þú sérð tvö spjöld sem passa saman, segir þú: „tvö“ og bendir á spjöldin tvö. Þá átt þú spjöldin. Þú leggur þau fyrir framan þig þannig að myndirnar, tölurnar eða formúlurnar snúi upp.
- 4 Ef þú sérð spjald sem passar við tvö þeirra sem þú hefur þegar fengið segir þú „þrjú“. Þá ertu kominn með slag. Hann gefur 3 stig. Hér á eftir sérðu dæmi um slag:



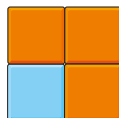
- 5 Þannig heldur þú áfram þar til búið er að finna alla slagina. Ef þér tókst ekki að finna þriðja spjaldið í slagi færðu 2 stig fyrir þann slag. Sá vinnur sem hefur flest stig.

Beinar formúlur og rakningarformúlur

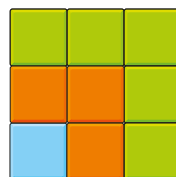
Þú hefur nú þegar æft þig í að búa til formúlur fyrir myndtölur. Hér muntu læra um tvær leiðir þegar finna á formúlur fyrir myndtölur.



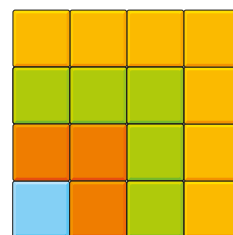
Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3



Mynd 4

Þú getur reiknað út hve margir kubbar eru í feringunum með því að reikna beint út frá hverjum feringi fyrir sig, þannig:

Mynd 1 hefur myndtöluna $m_1 = 1 \cdot 1 = 1$

Mynd 2 hefur myndtöluna $m_2 = 2 \cdot 2 = 4$

Mynd 3 hefur myndtöluna $m_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Mynd 4 hefur myndtöluna $m_4 = 4 \cdot 4 = 16$

Ferningstölurnar eru myndtölur feringanna.

Hver myndtala er myndnúmerið margfaldað með sjálfu sér.

Beina formúlan er því:

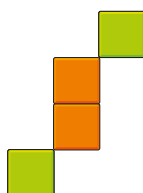
$$\underline{\underline{m_n = n \cdot n = n^2}}$$

Bein formúla
Formúla sem
gefur myndtöluna
beint út frá
myndnúmerinu.

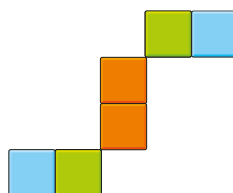
5.9 Elísa notar kubba til að búa til myndir eftir ákveðnu mynstri.



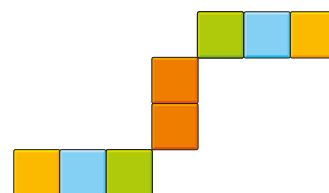
$m_1 = 2$



$m_2 = 4$



$m_3 = 6$



$m_4 = 8$

a Skrifaðu setningu um tengslin milli myndnúmera og myndtalna.

b Finndu beina formúlu fyrir m_n . Kannaðu hvort formúlan er rétt fyrir $n = 5$.

Á bls. 280 er sýnt hvernig hægt er að finna fjölda kubba í hverjum ferningi með beinni formúlu. Einnig er hægt að nota *rakningarformúlu*. Ferning má stækka með því að bæta við hann þeim fjölda kubba sem er oddatala, þannig:

Mynd 1 hefur myndtöluna $m_1 = 1$

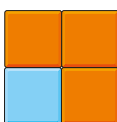
Mynd 2 hefur myndtöluna $m_2 = 1 + 3 = m_1 + 3 = m_1 + (4 - 1) = 4$

Mynd 3 hefur myndtöluna $m_3 = 4 + 5 = m_2 + 5 = m_2 + (6 - 1) = 9$

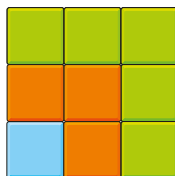
Mynd 4 hefur myndtöluna $m_4 = 9 + 7 = m_3 + 7 = m_3 + (8 - 1) = 16$



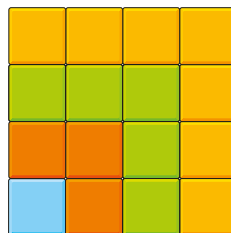
Mynd 1



Mynd 2



Mynd 3



Mynd 4

Þegar þú átt til dæmis að reikna út m_3 reiknar þú $4 + 5$. Oddatalan 5 er jafnt og $6 - 1 = 2 \cdot 3 - 1$, það er einum minna en tvisvar sinnum 3. Til að finna m_4 þarftu að leggja við $7 = 8 - 1$ þannig að þetta passar. Þú átt sem sagt að taka fyrri myndtölu og leggja við oddatöluna sem er einum minni en tvisvar sinnum myndtalan.

$$m_n = m_{n-1} + (2n - 1)$$

$2n - 1$ er talan sem kemur á undan $2n$ af því að $2n - 1$ er einum minni en $2n$. Ef n er t.d. 17 þá er $2n - 1 = 33$.

Þegar þú reiknar með rakningarformúlu þarftu að reikna út allar myndtölurnar frá m_1 og áfram alveg þangað til þú ert komin að þeirri myndtölu sem þú vilt finna.

5.10 Notaðu myndirnar í verkefni 5.9.

- Útskýrðu hvernig þú getur fundið hve margir kubbar eru í mynd 5 þegar þú veist hve margir kubbar eru í myndinni á undan.
- Sýndu – með því að teikna eða nota kubba – að aðferðin, sem þú fannst í a-lið, eigi við mynd 4 og 5.
- Hve marga kubba þarf Elísa til að búa til allar fimm fyrstu myndirnar?
- Búðu til rakningarformúlu fyrir m_n út frá því sem þú fannst í a-lið. Sýndu að formúlurnar passa við m_6 og m_7 .
- Elísa hefur 100 kubba. Hún ætlar að búa til eins margar myndir og hægt er frá mynd 1 og áfram.

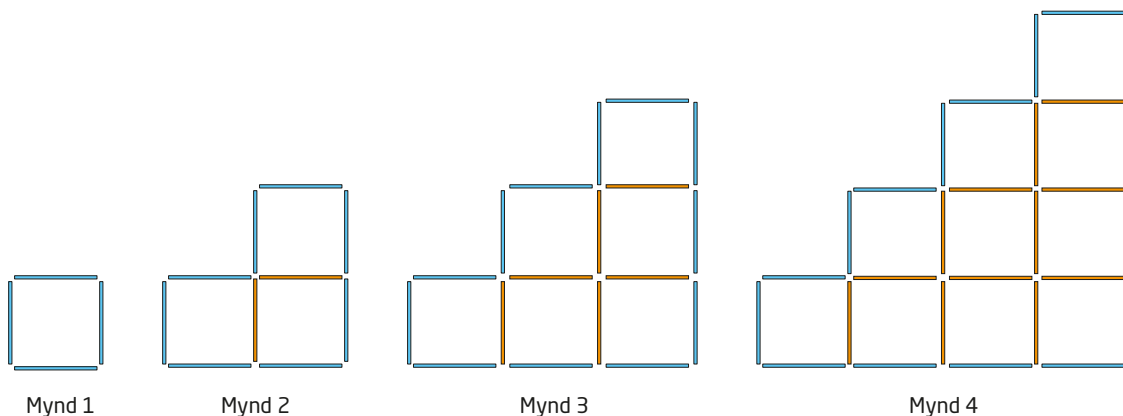
Hve margar fullgerðar myndir getur hún búið til?

Verða einhverjir kubbar afgang?

Rakningarformúla

Formúla sem gefur myndtöluna út frá fyrri myndtölu í mynstrinu.

5.11 Sigrún býr til tröppumynstur með pinnum. Hún notar bláa pinna á jaðrana.



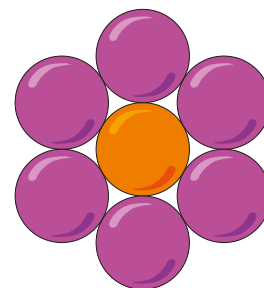
- a** Taflan til hægri sýnir fjölda blárra pinna í mynd 1 og 2. Myndtölurnar í þessu verkefni segja til um bláu pinnana. Finndu m_3 , það er að segja fjölda blárra pinna í mynd 3.

Myndnúmer	Fjöldi blárra pinna
1	$m_1 = 4$
2	$m_2 = 8$
3	?

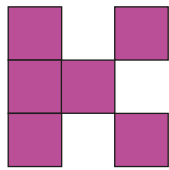
- b** Lýstu með orðum eða búðu til formúlu fyrir hve margir bláir pinnar eru í hverri mynd. Sýndu hvernig þú getur reiknað það beint (með beinni formúlu) eða út frá því hve margir pinnar voru notaðar í myndina á undan (með rakningarformúlu).
- c** Reiknaðu út m_{25} .

5.12 Myndin sýnir blóm úr hringjum.

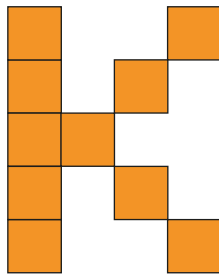
- a** Stækkaðu blómamyndina og búðu þannig til mynstur úr blómamyndum.
- b** Lýstu mynstrinu með orðum eða formúlu.
- c** Búðu til verkefni út frá mynstrinu þínu. Finndu svarið og skipstu á verkefnum við bekkjarfélaga þinn.



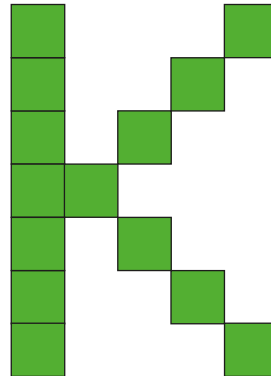
5.13 Bókstafinn K má búa til með reitum eins og sýnt er með þessum myndum.



$K_1 = 6$



$K_2 = 10$



$K_3 = 14$

- a Finndu K_6 . Notaðu rúðunet og teiknaðu myndirnar.
-  b Þú færð að vita að $K_{15} = 62$. Finndu K_{16} .
-  c Skrifaðu með orðum hvernig þú getur fundið myndtölurnar.
-  d Búðu til beina formúlu eða rakningarformúlu fyrir K_n .
-  e Athugaðu hvort formúlan fyrir K_7 og K_8 er rétt.
-  f Láttu n tákna hvaða myndnúmer sem er. Búðu til beina formúlu fyrir K_n .
-  g Hver er stærsta myndin sem þú getur búið til með 225 reitum? Verða einhverjir reitir afgangi?



Algebrustæður

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- tákna verkefni úr daglegu lífi með bókstöfum og tölum. Þetta kallast algebrustæður;
- skipta bókstöfum í algebrustæðu út fyrir tölur og reikna gildi stæðunnar.

Algebrustæða er formúla eða dæmi þar sem allar tölurnar eða einhverjar þeirra eru skrifaðar með bókstöfum. Bókstafirnir í algebrustæðum tákna óþekktar tölur.

Þegar þú lærðir um mynstur í síðasta kafla bjóst þú til algebrustæðu þegar þú skrifaðir formúlu fyrir myndtölurnar. Í mörgum sýnidæmum skoðaðir þú hvað væru sameiginleg einkenni og slík einkenni má tákna með orðum eða formúlum. Þetta kallast að alhæfa.

Sýnidæmi 4

Rúna býr til myndaramma úr ferningslaga mósaíkkubbum. Hliðarnar í kubbunum eru 1 cm á lengd.

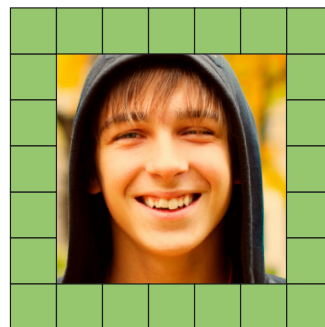
- Einn af römmum Rúnu er fyrir mynd sem er $5 \cdot 5$ cm að stærð. Hve marga mósaíkkubba þarf Rúna í þennan ramma?
- Skrifaðu með orðum hve marga mósaíkkubba Rúna þarf í ferningslaga ramma þegar þú veist hliðarlengd myndarinnar.
- Skrifaðu algebrustæðu fyrir þann fjölda mósaíkkubba sem Rúna þarf í ramma utan um mynd þar sem hliðarnar eru n cm á lengd. Talan n er í heilum sentimetrum.

Tillögur að lausn

- Myndin sýnir að fimm mósaíkkubbar eru á hverri hlið plús einn kubbur í hvert horn, það er að segja:

$$4 \cdot 5 + 4 = 20 + 4 = 24$$

Rúna þarf 24 mósaíkkubba fyrir þennan ramma.



b Fjöldi mósaíkkubba er fjórum sinnum lengd hliða myndarinnar
plús fjórir kubbar í hornunum.

c Ef hliðar myndarinnar eru n cm langar er ramminn gerður úr $4 \cdot n$ mósaíkkubbum á hliðarnar plús 1 mósaíkkubbur í hvert horn. Algebrustæðan fyrir fjölda mósaíkkubba er þá:

$$\underline{4 \cdot n + 4 = 4n + 4}$$

Í algebrustæðum sleppum við venjulega margföldunarmerkinu. $4n$ er þá sama og $4 \cdot n$.

5.14 Inga býr til hálsband og armband úr perlum. Allar perlurnar í hálsbandinu eru jafn stórar og allar perlurnar í armbandinu eru einnig af sömu stærð. Hálsbandið á að vera 60 cm á lengd og armbandið 24 cm.



- a** Inga notar í hálsbandið perlar sem eru 2 cm í þvermál en í armbandið perlar sem eru 1 cm í þvermál.
Hve margar perlar þarf Inga af hverri tegund og hve margar perlar þarf hún samtals?
- b** Hve margar perlar þarf Inga af hverri tegund og hve margar perlar þarf hún samtals ef perlurnar í hálsbandinu eru 3 cm í þvermál og perlurnar í armbandinu $\frac{1}{2}$ cm í þvermál?
- c** Kallaðu þvermál perlanna í hálsbandinu k og þvermál perlanna í armbandið a . Skrifaðu algebrustæðu fyrir
 - hve margar perlar Inga þarf í hvorn skartgrip;
 - hve margar perlar Inga þarf alls.

Hugsaðu þér tölu. Skrifaðu stæðu sem er 3 stærri en talan þín. Þá skrifar þú töluna plús 3. Ef þú veist ekki hver talan er getur þú til dæmis kallað töluna a . Þá er $a + 3$ algebrustæða fyrir töluna sem er 3 stærri en talan þín.

Ef þú átt að finna tölu sem er tvöfalt stærri en önnur tala þarftu að margfalda þá síðarnefndu með 2. Ef þú veist ekki hver talan er getur þú til dæmis kallað hana b . Þá er $2 \cdot b = 2b$; $2b$ er algebrustæða fyrir töluna sem er tvöfalt stærri en b .

Sýnidæmi 5

Allir meðlimir í fjölskyldu nokkurri eiga að hugsa um aldur sinn. Síðan á hver þeirra að reikna út

- a aldur sinn eftir 5 ár
- b tvöfaldan núverandi aldur sinn
- c aldur sinn fyrir 4 árum
- d aldur sinn eftir 20 ár
- e helming núverandi aldurs
- f tvöfaldan aldurinn eftir 6 ár
- g tvöfaldan aldurinn eins og hann var fyrir 2 árum

Ef engir í fjölskyldunni eru jafn gamlir fá allir mismunandi svör.

Búðu til algebrustæður fyrir öll svörin. Skráðu svörin í töflu.

Bókstafurinn a táknar aldur fjölskyldumeðlims.

Tillaga að lausn

a aldurinn eftir 5 ár	$a + 5$
b tvöfaldur núverandi aldur	$2a$
c aldurinn fyrir 4 árum	$a - 4$
d aldurinn eftir 20 ár	$a + 20$
e helming núverandi aldurs	$\frac{1}{2} a$
f tvöfaldur aldurinn eftir 6 ár	$2(a + 6)$
g tvöfaldur aldurinn eins og hann var fyrir 2 árum	$2(a - 2)$



5.15 Kennarinn í 8. A, Kári, er k ára. Það þýðir að eftir 1 ár verður Kári $k + 1$ ára og að fyrir tveimur árum var hann $k - 2$ ára.

- a** Búðu til algebrustæðu fyrir aldur Kára á mismunandi tímum sem skráðir eru í töflunni hér á eftir.

Tími	Aldur Kára
núna	k
eftir 1 ár	$k + 1$
eftir 2 ár	
eftir 5 ár	
eftir 10 ár	
fyrir 2 árum	$k - 2$
fyrir 3 árum	
fyrir 10 árum	
fyrir 20 árum	

- b** Nemendur fá að vita að $k - 3 = 38$.
Hvað þýðir það? Hvað er Kári gamall núna?

5.16 Kötturinn Brandur er b ára og hundurinn Snati er s ára. Brandur er eldri. Búðu til texta við stæðurnar hér á eftir.

- a** $b - 3$ **c** $b + s$ **e** $b - s$ **g** $b + s - 2$
b $s + 4$ **d** $s + 5$ **f** $b - 4$ **h** $\frac{b + s}{2}$

5.17 Verð á kílógrammi af appelsínunum og vínberjum er mismunandi. Í hverri viku kaupir Elsa 3 kg af appelsínunum og 2 kg af vínberjum.

- a** Eina vikuna kosta appelsínur 250 kr. kílógrammið og vínber 350 kr. kílógrammið.
Hve mikið borgar Elsa samtals fyrir appelsínurnar og vínberin?
- b** Kallaðu verð af kílógrammi á appelsínunum a og á vínberjum b .
Búðu til algebrustæðu fyrir verðið sem Elsa borgar samtals fyrir appelsínurnar og vínberin.



5.18 Skrifaðu algebrustæður.

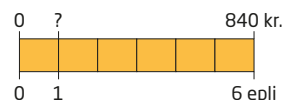
- a** María er m ára í dag.
Skrifaðu algebrustæðu fyrir hvað hún var gömul fyrir 8 árum.
- b** Nína er n ára í dag.
Skrifaðu algebrustæðu fyrir aldur hennar þegar hann var helmingur af aldri hennar í dag.
- c** Karl er k ára í dag. Ara vantar 2 ár upp á að aldur hans sé tvöfaldur aldur Karls.
Skrifaðu algebrustæðu fyrir aldur Ara nú.

5.19 Skrifaðu algebrustæðu sem sýnir eftirfarandi:

- a** að leggja saman 6 og a
- b** að draga 10 frá b
- c** að margfalda r með 4
- d** að finna hvaða stærð er tvöföld stærðin h
- e** að leggja saman b og c
- f** að finna hvaða stærð er þreföld stærðin k



5.20 **a** 6 epli kosta 840 kr. samtals.
Hvað kostar hvert epli?



- b** 6 bananar kosta b krónur samtals.
Skrifaðu algebrustæðu sem sýnir hvað hver banani kostar.

5.21 Skrifaðu algebrustæður.

- a** Kári er k ára. Pétur er 2 árum eldri en Kári.
Skrifaðu algebrustæðu sem sýnir aldur Péturs og Kára samtals.
- b** Skrifaðu algebrustæðu fyrir summu þriggja náttúrlegra talna sem koma hver á eftir annarri í talnaröðinni. Kallaðu töluna í miðjunni m .
- c** Verð á skóm í verslun nokkurri er n krónur. Í annarri verslun kosta skórnir tvo þriðju hluta af fyrrnefnda verðinu.
Skrifaðu algebrustæðu sem sýnir mismuninn á verðinu.

Náttúrlegar tölur
eru tölurnar sem
við teljum með:
1, 2, 3, 4 ...



5.22 Lísu á 10 bækur. Bækur Ottós nema tvöfaldri bókaeign Lísu. Berta á 4 bókum færri en Ottó.

a Hve margar bækur á Ottó og hve margar bækur á Berta?

Lísu á k bækur. Ottó á tvöfalt fleiri bækur en Lísu.
Berta á 4 bókum færri en Ottó.

b Skrifaðu algebrustæðu sem lýsir hve margar bækur Berta á.

5.23 Magni gengur 15 km á skíðum á hverjum laugardegi allan veturinn ef skíðafæri er gott. Á sunnudögum gengur hann 26 km. Um veturinn var gott skíðafæri á x laugardögum og y sunnudögum.

a Skrifaðu algebrustæðu fyrir hve langa vegalengd Magni gekk samtals þennan vetur.

Eiríkur gengur stundum með Magna og gengur þá jafn langa vegalengd. Þennan vetur gekk Eiríkur fjórum laugardögum færri en Magni og helmingi færri sunnudaga.

b Skrifaðu algebrustæðu fyrir vegalengdina sem Eiríkur gekk alls.

5.24 Á bíómynd voru seldir x barnamiðar og y fullorðinsmiðar. Barnamiðarnir voru fleiri.

Skrifaðu með orðum hvað þú finnur ef þú reiknar út úr þessum stæðum:

a $x + y$



c $y : x$



b $x - y$



d $\frac{y}{x + y} \cdot 100\%$



Gildi algebrustæðna

Í algebrustæður eru notaðir bókstafir í staðinn fyrir einhverjar talnanna. Algebrustæða er því eins konar formúla þar sem hægt er að setja tölur í staðinn fyrir bókstafi til að finna gildi stæðunnar. Bókstafirnir eru kallaðir breytur.

Sýnidæmi 6

Óðinn er 3 árum yngri en bróðir hans. Bróðirinn er b ára.

- a Skrifðu algebrustæðu fyrir aldur Óðins.
- b Gerðu töflu sem sýnir hve gamall Óðinn er þegar bróðirinn er 2, 10 og 12 ára.
- c Hvað merkir gildi algebrustæðunnar þegar $b = 2$?

Tillögur að lausn

- a Úr því að Óðinn er 3 árum yngri en bróðirinn þarf að draga töluna 3 frá aldri bróðurins: $b - 3$.

$b - 3$ er algebrustæða fyrir aldur Óðins.

Fyrir hvert ár sem líður breytist gildið á b . Þá mun gildið einnig breytast á $b - 3$ en það mun alltaf tákna aldur Óðins.

- b Settu aldur bróðurins í staðinn fyrir b í algebrustæðunni fyrir aldur Óðins. Þar næst getur þú reiknað út gildi stæðunnar.

Aldur bróðurins, b	Aldur Óðins, $b - 3$
2	$2 - 3 = -1$
10	$10 - 3 = 7$
12	$12 - 3 = 9$

- c $2 - 3 = -1$

Gildið er -1 . Þegar bróðirinn var 2 ára var eitt ár þangað til Óðinn fæddist.

5.25 Finndu gildi algebrustæðnanna, fyrst þegar $k = 3$ og síðan þegar $k = 20$.

- a** $k + 5$ **c** $3k$ **e** $60 : k$
b $k - 2$ **d** $25 - k$ **f** $5k - 10$

5.26 Hver af formúlunum þremur, A, B og C, passa við töfluna?

- A** **B** **C**
- $T_n = 2n + 6$ $T_n = 3n + 5$ $T_n = 4n$

n	T_n
1	8
3	14
5	20

5.27 Tengdu saman formúlu og talnarunu sem passa saman.

- a** $100 - n$ **1** $2, 4, 6, 8, \dots$
b $2n - 1$ **2** $1, 3, 5, 7, \dots$
c $\frac{n(n+1)}{2}$ **3** $1, 3, 6, 10, \dots$
d $2n$ **4** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
e $\frac{1}{n}$ **5** $99, 98, 97, 96, \dots$

5.28 Finndu gildi algebrustæðnanna ef

- $t = 2$ og $u = 1$ ● $t = 7$ og $u = -1$ ● $t = -5$ og $u = -3$

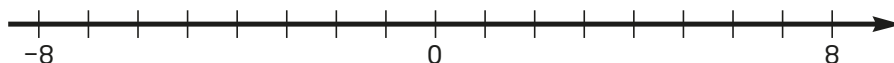
- a** $3t + u$ **d** $t - 2u$
b $u + 2t$ **e** $-3t$
c $5u$ **f** $-t - u$

5.29 Í konfektkassa eru n molar. Í a-, b- og c-lið áttu að skrifa svarið sem algebrustæðu með n .

- a** Hve margir konfekt molar eru eftir í kassanum þegar búið er að taka 12 mola?
b Konfekt molunum er skipt jafnt milli fimm manna. Hvað fær hver marga mola?
c Hve margir molar eru samtals í 5 sams konar konfektkössum?
d Reiknaðu út gildi algebrustæðna í a-, b- og c-lið þegar $n = 30$.



5.30 Teiknaðu talnalínu frá -8 til 8.



Reiknaðu gildi algebrustæðnanna sem segja til um

$a, h, k, l, m, b, c, s, i, j, n, u$ og v .

Settu hvern bókstaf ofan við gildi hans á talnalínunni.

$$a = 0$$

$$h = a + 4$$

$$k = \frac{1}{2}h$$

$$l = k + h$$

$$m = a - h$$

$$b = 4k$$

$$c = b - 11$$

$$s \text{ er } 3 \text{ minni en } m$$

$$i \text{ er mitt á milli } s \text{ og } c$$

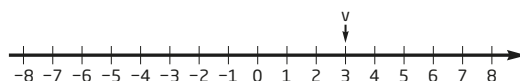
$$j = i + h$$

$$n \text{ er neikvæð tala, jafn langt frá } 0 \text{ og } k \text{ er frá } 0$$

$$u = l + j$$

$$v = u + n$$

Ef þú hefur gert þetta rétt mun v standa fyrir ofan töluna 3.



5.31 Í peningaveski Önnu eru a krónur. Í peningaveski Barða eru b krónur. a er stærri en b .

a Hvað merkir stæðan $a + b$?

b Hvað merkir stæðan $a - b$?

c Finndu gildi a og b þegar $a + b = 40$ og $a - b = 12$.

Algebruspil

Spilið er fyrir tvo leikmenn.

Þið þurfið

- spilastokk
- reikningshefti eða blað



Aðferð

- 1 Fjarlægðu öll mannsþilin úr spilastokknum.
- 2 Skiptu spilastokknum í fjóra jafn stóra bunka, tvo bunka með svörtum spilum (s) og tvo með rauðum (r). Hvor leikmaður fær einn svartan bunka og einn rauðan. Þeir leggja bunkana á hvolf á borðið. Annar bunkinn, r -bunkinn, táknar gildin á r og hinn bunkinn, s -bunkinn, táknar gildin á s í algebrustæðu með r og s . Ásinn hefur gildið 1.

- 3 Hvor leikmaður velur eina algebrustæðu af þeim sem skráðar eru hér á eftir.

$$2r + 6s$$

$$4r + 4s$$

$$10r - 2s$$

$$-r + 9s$$

- 4 Báðir leikmenn snúa við efsta spilin í hvorum bunka og reikna út gildi algebrustæðunnar sem þeir völdu. Sá sem fær hærra gildi fær slaginn. Ef gildin eru jöfn draga báðir leikmenn tvö ný spil og reikna út gildi stæðunnar að nýju. Sá sem nú fær hærra gildi fær báða slagina.
- 5 Sá leikmaður vinnur spilið sem á fleiri slagi þegar öll spilin í báðum bunkum annars leikmannsins eru uppurin.

Afbrigði af spilin

Hvor leikmaður býr til sína eigin algebrustæðu með breytunum r og s .

Bókstafareikningur

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- reikna með bókstöfum

Í algebru eru bókstafir tákn fyrir tölur. Þegar þú reiknar með bókstöfum notar þú nákvæmlega sömu reiknireglur og þegar þú reiknar með tölum.

Að draga saman líka liði

Þegar þú leggur saman nokkrum sinnum sömu tölu getur þú skrifað dæmið á einfaldari hátt með margföldunartákninu, þannig:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \cdot 5$$

Með bókstöfum leggjum við saman á sama hátt, þannig:

$$a + a + a + a + a + a = 6 \cdot a = \underline{\underline{6a}}$$

Einfalda má stæðu með bókstöfum þar sem sami stafurinn kemur fyrir oftari en einu sinni:

$$3a + 2a = \underbrace{a + a + a}_{3a} + \underbrace{a + a}_{2a} = \underline{\underline{5a}}$$

$$3 \cdot 2b = \underbrace{b + b}_{2b} + \underbrace{b + b}_{2b} + \underbrace{b + b}_{2b} = (3 \cdot 2)b = \underline{\underline{6b}}$$

$$6c - 2c = \underline{\underline{4c}}$$

$$c + c + c + c + c + c$$

Liður Tölur eða bókstafir sem eru tengdir saman með samlagningarmerki eða frádráttarmerki.

Fastaliður er liður í stæðu sem inniheldur einungis tölu.

Breytuliður er liður í stæðu sem inniheldur breytu.

$2a + 3b + 5$ er algebrustæða með þremur *liðum*. Í tveimur fyrstu liðunum, $2a + 3b$, eru breytur. Við getum kallað slíkan lið *breytulið*. Í síðasta liðnum er bara tala. Hann kallast *fastaliður*.

Einföldun algebrustæðna

Algebrustæður eru einfaldaðar með því að draga saman fastaliðina og ólíka breytuliði hverja fyrir sig.

Stæðuna $8p - 5 + 4p + 7$ má einfalda í stæðuna $12p + 2$.

Þú getur ekki dregið saman ólíka breytuliði eins og til dæmis $2a + 3b$.

Ástæðan er sú að a og b geta haft mismunandi gildi.

5.32 Einfaldaðu stæðurnar með því að draga saman líka liði:

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| a $3p + 5p$ | d $12b + 8b + 3b$ |
| b $7s - 2s$ | e $5u + 2u - u$ |
| c $10a - 3a$ | f $6v - 5v + 8v$ |

5.33 Einfaldaðu stæðurnar:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a $12k + 16k - 20k + 4k$ | c $3n + 14n - 8n - 8n$ |
| b $30m - 12m - 5m - 6m$ | d $20p - 18p - 3p + p$ |

5.34 Ís í formi kostar k krónur stykkið og pinnaís kostar p krónur stykkið.

- a** Í töflunni hér fyrir neðan sérðu hve marga ísa Anna, Björn og Sýlvía kaupa. Búðu til algebrustæðu fyrir hve mikið þau borga:

	Kaupir	Borgar
Anna	3 ísa í formi og 2 pinnaísa	$3k + 2p$
Björn	2 ísa í formi og 4 pinnaísa	
Sýlvía	6 ísa í formi og 5 pinnaísa	
Samtals		

- b** Skrifaðu algebrustæðu fyrir hvað þau borga samtals.
- c** Hve mikið borgar hvert þeirra þegar $k = 150$ kr. og $p = 100$ kr.?
- d** Hve mikið borga þau samtals þegar $k = 150$ kr. og $p = 100$ kr.?
Finndu svarið bæði með því að leggja saman tölurnar í svörunum við c-lið og með því að setja gildin á k og p inn í stæðuna í b-lið.

Færðu sama svar?



Nú hefur þú æft þig í að einfalda stæður með bókstöfum með því að draga saman breytuliði með sama bókstaf. Reiknireglurnar um tölur gilda einnig þegar við reiknum með bókstöfum. Hér fyrir neðan sérðu hvað er líkt og hvað er ólíkt með talnareikningi og bókstafareikningi.

Tölur

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 8 + 9 \cdot 8 + 3 = 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 3 = 35 + 32 + 3 = 70$$

Þegar þú reiknar með tölum getur þú í lokin fengið svar sem er tala.

Stæða með bókstöfum

$$2a + 3a - 5b + 9b + 3 = 5a + 4b + 3$$

Þegar þú reiknar með bókstöfum færðu ekki alltaf einfalt svar. Svárið getur verið í fleiri en einum lið. Hér fyrir ofan eru þrír liðir í svarinu.

Sýnidæmi 7

Dragðu saman fastaliðina og breytuliði með sama bókstaf.

$$5a + 4b + 7 + 6a - 2b - 2$$

Tillaga að lausn

Þú raðar saman liðum með sama bókstaf og einnig fastaliðunum. Þá getur verið auðveldara að sjá hvaða liði á að draga saman.

5	a	+	4	b	+	7	+	6	a	-	2	b	-	2	=	5	a	+	6	a	+	4	b	-	2	b	+	7	-	2	=	11	a	+	2	b	+	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---

Gildi stæðunnar breytist ekki þótt þú breytir röð liðanna.

Ef þú sérð hvaða liði má draga saman getur þú reiknað út svárið í huganum.

5.35 Dragðu saman fastaliði og liði með sama bókstaf.

a $5k + 2k$

f $2k - 5k$

b $6b - 4b$

g $p - 2 + 3p - 2$

c $3h + 4 - h$

h $6s + 12 - 5s + 7$

d $8 - 3a + 3$

i $6r - 5s - 5r + s$

e $5 + 2b - b$

j $15a - 10 + b + 5a$

5.36 Dragðu saman fastaliði og liði með sama bókstaf.

a $3a + 2b + 2a + 10b$

d $3i - 4j - 2 - 5i - 2j + 15$

b $m - 2n + 3m + 5n$

e $u + v + u + u + u - 3u$

c $10p + 4s + 5 - 10p + 4s$

f $3k + 4 + 2k - 5 - 4k - 2$

5.37 Dragðu saman fastaliði og liði með sama bókstaf.

a $3a - 5b + a - 8c + 3 - 3a - 3b + 8c - 2$

b $x + y + z - 1 + 3z - 4y + x - 5$

c $125m - 60n + 20n + 105m + 12 - 17n - 24$

d $-3x + 4y - 5x + 6z - 7 + 8z - 9y + 10x - 11$

e $2a + 4 - 6b + 1 - 4a + b - 5 + 2a - 5b$

5.38 Dragðu saman fastaliðina og liði með sama bókstaf.

a $\frac{2}{3}a + 2b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} - 6b - 1$

b $-5p + 7q - 10 - 15q + 3 + p$

c $4,3x + 0,6y + 0,3 + 1,7x + 2,4y - 0,8$

d $\frac{5}{2}s - t + s + \frac{1}{2}t$

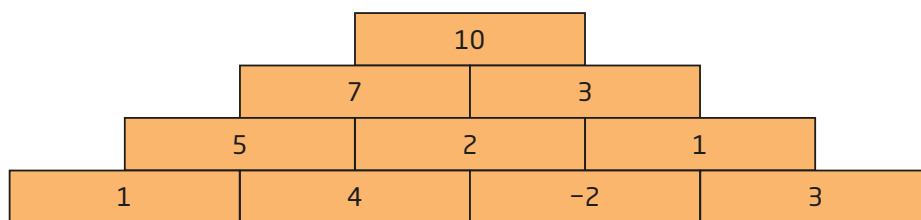
e $\frac{a}{4} - b + \frac{b}{3} - \frac{a}{3}$

5.39 a Skrifaðu algebrustæðu fyrir

- töluna x ,
- plús helmingi stærri tölu en y ,
- mínus helmingurinn af tölunni x ,
- plús 4,
- plús þrefalt stærri tala en y og
- mínus 3

b Einfaldaðu algebrustæðuna í a-lið með því að draga saman líka liði.

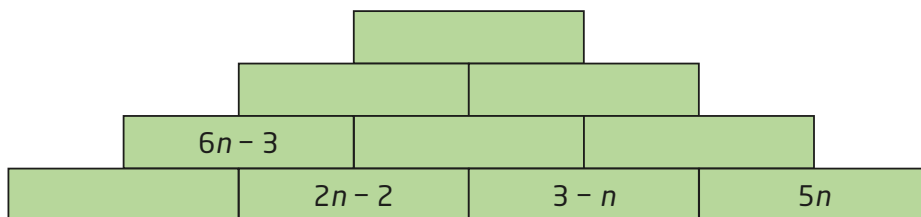
Talnapíramídi er þannig byggður upp að talan í einum reit er summa talnanna í reitunum tveimur næst fyrir neðan.



Þú getur búið til talnapíramída á sama hátt. Ef algebrustæður eru í einhverjum reitanna getur þú fyllt út í hina reitina. Þú veist að stæðan í einum reit er summa stæðnanna í reitunum tveimur næst fyrir neðan.

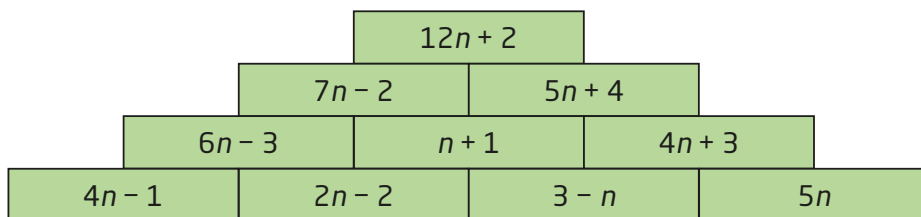
Sýnidæmi 8

- Ljúktu við algebrupíramídann.
- Settu $n = 1$ í allar stæðurnar í algebrupíramídanum í a-lið og gakkðu úr skugga um að talnapíramídiinn sé réttur.



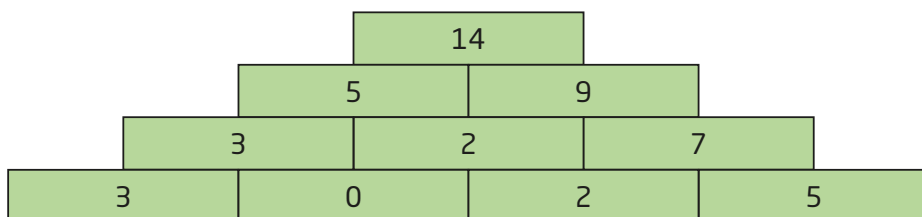
Tillögur að lausn

- Í neðsta reit til vinstri á að standa $4n - 1$ úr því að liðirnir með bókstafnum n eiga að verða $6n$ alls – og tölurnar eiga að verða -3 alls. Þá er aðeins eftir að draga saman tvær og tvær stæður í senn til að finna hvað á að standa í hinum reitunum. Niðurstaðan verður þessi





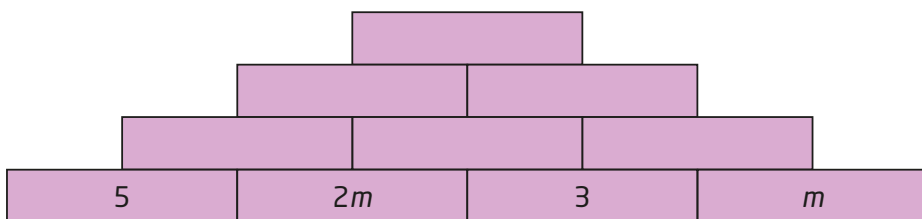
- b Með því að setja $n = 1$ í allar stæðurnar í algebrupírámídanum færðu þennan talnapírámíða.



Talnapírámíðinn er réttur ef talan í einum reit er summa talnanna í reitunum tveimur sem eru næst fyrir neðan.

- 5.40** Í algebrupírámíða er stæðan í einum reit jöfn summu stæðnanna í reitunum tveimur næst fyrir neðan.

- a Ljúktu við algebrupírámíðann.

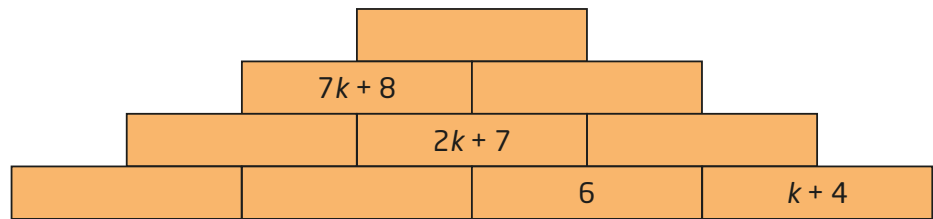


- b Settu $m = 2$ í algebrupírámídanum í a-lið og athugaðu hvort hann er réttur.



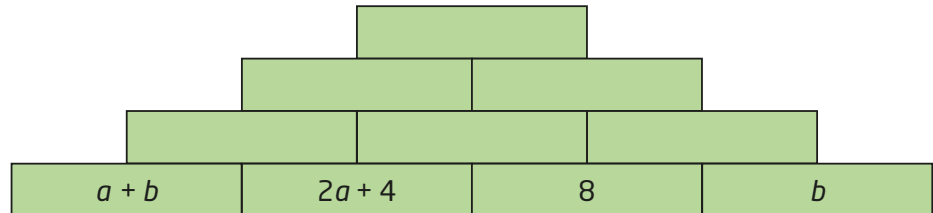
- 5.41 Í algebrupíramíða er stæðan í einum reit jöfn summu stæðnanna í reitunum tveimur næst fyrir neðan.

a Ljúktu við algebrupíramíðann.



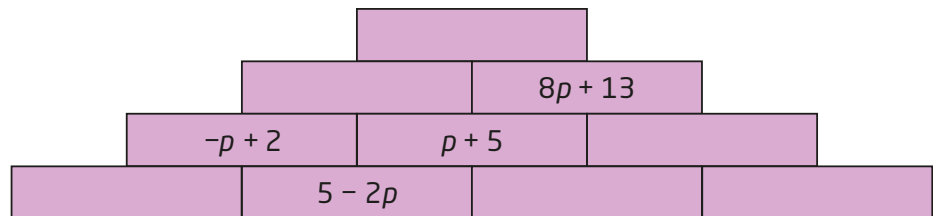
b Settu $k = -1$ í algebrupíramíðann í a-lið og athugaðu hvort talnapíramíðinn er réttur.

- 5.42 a Ljúktu við algebrupíramíðann.



b Settu $a = 1$ og $b = 1$ í algebrupíramíðann í a-lið og athugaðu hvort talnapíramíðinn er réttur.

- 5.43 a Ljúktu við algebrupíramíðann.



b Settu $p = 3$ í algebrupíramíðann í a-lið og athugaðu hvort talnapíramíðinn er réttur.



5.44 Reiknaðu dæmin.

- a** Þú færð að vita að $x = 2$. Hvað er 3 meira en x ?
- b** Þú færð að vita að $m = 10$. Hvað er helmingurinn af m ?
- c** Þú færð að vita að $x = 5$. Hvað er $2x + 1$?
- d** Þú færð að vita að $a + 3 = 7$. Hvað er $2a - 1$?
- e** Þú færð að vita að $m + n = 15$. Hvað er $2m + 2n$?
- f** Þú færð að vita að $a = b + 2$. Hvað er $2a - 4$?



Sýnidæmi 9

Pegar þú átt að reikna út margföldunardæmi og deilingardæmi, sem eru með bókstöfum, skaltu margfalda eða deila í tölurnar sérstaklega og bókstafina fyrir sig.

1	$8 \cdot 3a = \underline{\underline{24a}}$	4	$20a : 4 = \underline{\underline{5a}}$
2	$4b \cdot 7 = \underline{\underline{28b}}$	5	$12ab : 3a = \frac{12\overset{4}{\cancel{a}}b}{\underset{11}{3}\cancel{a}} = \underline{\underline{4b}}$
3	$b \cdot 6b = \underline{\underline{6b^2}}$	6	$3x^2y : 6xy^2 = \frac{3\overset{1}{\cancel{x}}\overset{1}{\cancel{x}}y}{\underset{2}{6}\overset{1}{\cancel{x}}\underset{1}{y}\underset{1}{y}} = \underline{\underline{\frac{x}{2y}}}$

5.45 Reiknaðu dæmin og einfaldaðu eins og hægt er.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a $3 \cdot 6b$ | d $6k \cdot 10$ | g $5b \cdot 9b$ |
| b $5 \cdot 2d$ | e $10m : 2$ | h $10a : 5$ |
| c $4a \cdot 5$ | f $30n : 6$ | i $6x^2z^3 : x$ |

5.46 Reiknaðu dæmin og einfaldaðu eins og hægt er.

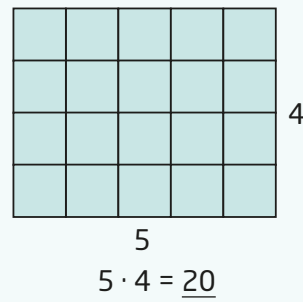
- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a $3x^2y \cdot 2xy^2$ | e $(2xy + 4xy) : 3y$ |
| b $(2n - 3 - n + 4 - n)$ | f $5y^2 : 15x^2$ |
| c $(p + 3 + 2p - 3) : 3p^2$ | g $\frac{3}{x} : \frac{x}{6}$ |
| d $x^2y^3z : xyz^2$ | h $2xy : \frac{y}{2}$ |

Stæður með sviga

Margfeldi

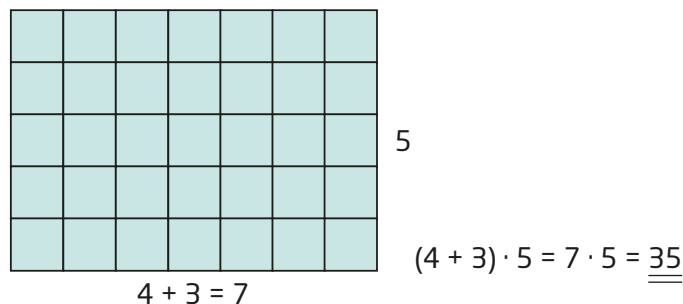
Svarið við margföldunardæmi.

Margfeldi tveggja talna, til dæmis $5 \cdot 4$, má lýsa með rétthyrningi sem í eru 5 reitir á annan veginn og 4 reitir á hinn veginn. Fjöldi reita í rétthyrningnum samsvarar svarinu við margföldunardæminu.

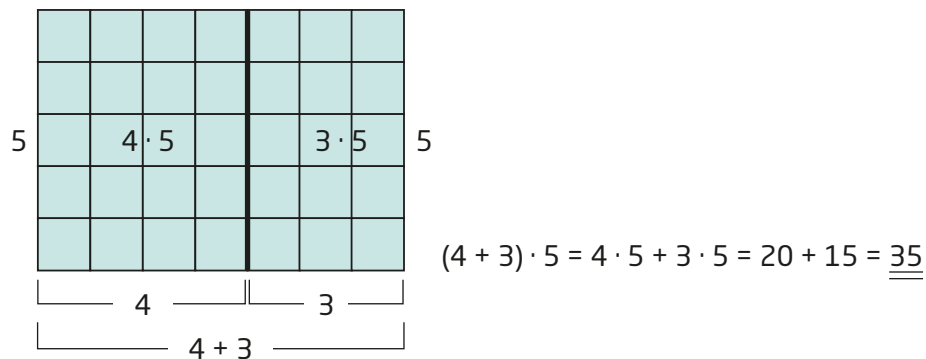


Margföldunardæmið $(4 + 3) \cdot 5$ má sýna með rétthyrningi á tvo vegu:

- 1** Rétthyrningur með 7 reitum á annan veginn og 5 reitum á hinn veginn:



- 2** Rétthyrningur samsettur úr tveimur minni rétthyrningum, annar með $4 \cdot 5$ reitum og hinn með $3 \cdot 5$ reitum.



5.47 Teiknaðu rétthyrninga við margföldunardæmin eins og hér á undan.

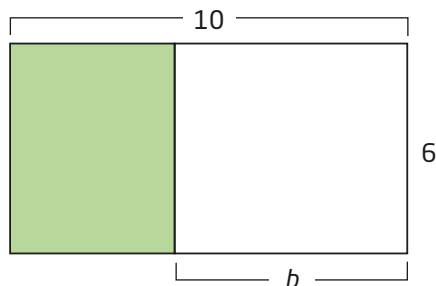
a $(1 + 3) \cdot 4$

b $5 \cdot (2 + 4)$

c $3 \cdot (2 + 5)$

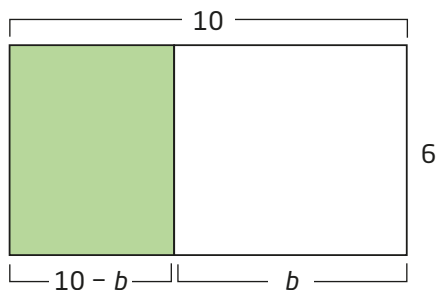
Sýnidæmi 10

Rétthyrningurinn hér til hægri er gerður úr tveimur litlum rétthyrningum, grænum og hvítum. Skrifðu algebrustæðu fyrir flatarmál græna rétthyrningsins á tvo mismunandi vegu.



Tillaga að lausn

Til að skrifa aðra stæðuna þarftu að finna grunnlínuna og hæðina í græna rétthyrningnum. Grunnlína í græna rétthyrningnum er grunnlína alls rétthyrningsins (hvíts og græns) mínus grunnlína í þeim hvíta, það er $10 - b$.



Hæðin í græna rétthyrningnum er jöfn hæðinni í öllum rétthyrningnum (hvíta og græna), það er 6. Þá er flatarmál græna rétthyrningsins:

$$(10 - b) \cdot 6$$

Til að skrifa hina stæðuna getur þú hugsað um flatarmál græna rétthyrningsins sem flatarmál alls rétthyrningsins (hvíts og græns) mínus flatarmál hvíta rétthyrningsins.

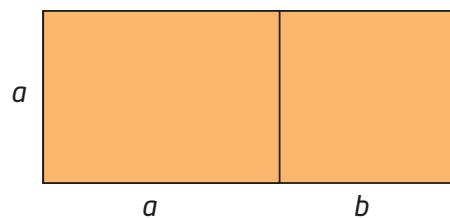
$$(10 \cdot 6) - (b \cdot 6) = 60 - 6b$$

Þar sem báðar stæðurnar, $(10 - b) \cdot 6$ og $60 - 6b$, tákna flatarmál græna rétthyrningsins hljóta báðar stæðurnar að hafa sama gildi.

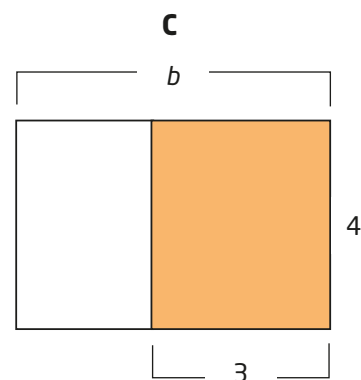
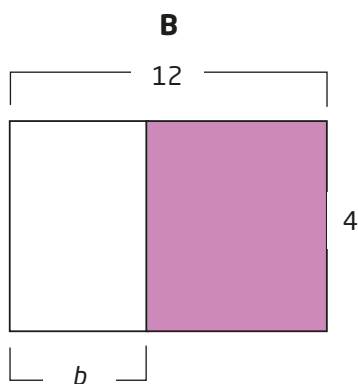
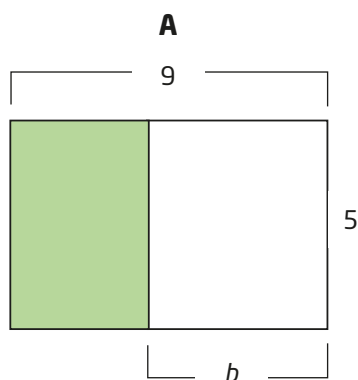
$$(10 - b) \cdot 6 = 60 - 6b$$

5.48 Skráðu flatarmál rétthyrningsins til hægri á tvo mismunandi vegu.

- a** Skráðu heildarflatarmál stóra rétthyrningsins með stæðu sem inniheldur sviga.
- b** Skráðu flatarmálið sem summu flatarmála tveggja minni rétthyrninga.



5.49 Skrifaðu tvær algebrustæður fyrir flatarmál litaða svæðisins í hverjum rétthyrninganna A, B og C. Settu jöfnumerki milli stæðnanna og athugaðu hvort þær eru jafngildar og þar með réttar.



5.50 Teiknaðu rétthyrninga sem sýna að stæðurnar eru jafngildar.

a $(5 + b) \cdot 3$ og $15 + 3b$

b $(a + 2) \cdot b$ og $ab + 2b$

c $2 \cdot (n + 2)$ og $2n + 4$

d $(x + y) \cdot 2$ og $2x + 2y$

e $4 \cdot (d + 1)$ og $4d + 4$

f $a \cdot (a + 1)$ og $a^2 + a$

5.51 Teiknaðu rétthyrninga sem sýna að stæðurnar eru jafngildar.

a $(7 - a) \cdot 2$ og $14 - 2a$

b $3 \cdot (b - 3)$ og $3b - 9$

c $(a - 4) \cdot 2$ og $2a - 8$

d $(x - y) \cdot 4$ og $4x - 4y$

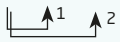
e $2 \cdot (3a - 2b)$ og $2 \cdot 3a - 2 \cdot 2b$

f $(a + b) \cdot b$ og $ab + b^2$



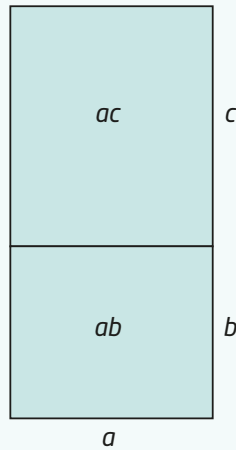
Reiknireglur um að margfalda saman tölu eða bókstaf og stæðu með sviga. Örvarnar sýna hvaða bókstafi eða tölur á að margfalda saman.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

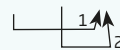


eða

$$a(b + c) = ab + ac$$

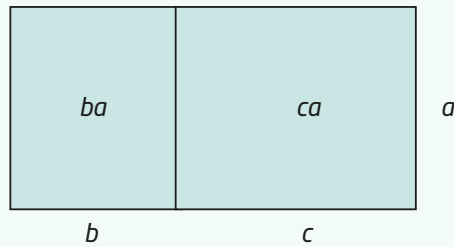


$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

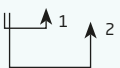


eða

$$(b + c)a = ba + ca = ab + ac$$

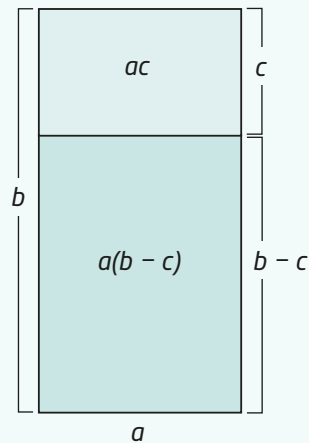


$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

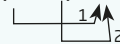


eða

$$a(b - c) = ab - ac$$

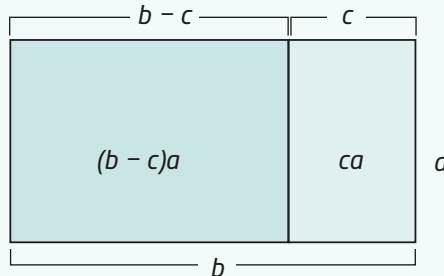


$$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$



eða

$$(b - c)a = ba - ca = ab - ac$$



5.52 Notaðu reiknireglurnar á blaðsíðunni á undan og ljúktu við að skrifa dæmin. Reiknaðu þau síðan.

a $5 \cdot (20 + 3) = 5 \cdot \square + 5 \cdot \square$

g $48 \cdot 7 = 50 \cdot 7 - \square \cdot 7$

b $7 \cdot 52 = \square \cdot 50 + \square \cdot 2$

h $12 \cdot 102 = \square \cdot 100 + 12 \cdot \square$

c $30 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = \square \cdot \square$

i $98 \cdot 12 = 100 \cdot \square - \square \cdot 12$

d $12 \cdot 60 - 12 \cdot 3 = \square \cdot (60 - \square)$

j $50 \cdot 47 = 50 \cdot 50 - 50 \cdot \square$

e $21 \cdot (30 - 6) = 21 \cdot \square - \square \cdot 6$

k $19 \cdot 20 = \square \cdot \square - \square \cdot \square$

f $(40 + 9) \cdot 17 = \square \cdot 17 + 9 \cdot \square$

l $30 \cdot 31 = \square \cdot \square + \square \cdot \square$

5.53 Notaðu reiknireglurnar til að margfalda saman tölur eða bókstafi og stæður í sviga. Ljúktu við að skrifa dæmin. Margfaldaðu tóurnar saman og fjarlægðu margföldunartákninn þar sem það er hægt.

a $n \cdot (30 + 8) = \square \cdot 30 + \square \cdot 8$

g $a \cdot b + 3 \cdot b = (\square + 3) \cdot \square$

b $3 \cdot (7 + k) = 3 \cdot \square + 3 \cdot \square$

h $a^2 - a \cdot b = \square \cdot (\square - b)$

c $12 \cdot a - 7 \cdot a = (12 - \square) \cdot \square$

i $4a \cdot (7 + a) = \square \cdot 7 + 4a \cdot \square$

d $(a + b) \cdot 9 = \square \cdot 9 + b \cdot \square$

j $(2k - 1) \cdot 3 = 2k \cdot \square - \square \cdot \square$

e $2 \cdot (c - 5) = 2 \cdot \square - \square \cdot 5$

k $4p + 6 = 2 \cdot (\square + \square)$

f $6 \cdot 4 + 6 \cdot m = \square \cdot (\square + m)$

l $2ab - 4a = 2a \cdot (\square - \square)$

5.54 Notaðu réttar reiknireglur til að margfalda saman tölurnar eða bókstafina og stæður í sviga. Skráðu eins einföld svör og hægt er.

a $3(a + 1)$

d $m(10 - 3)$

b $(4 + b) \cdot 2$

e $(2 + 4x)y$

c $(x - 6) \cdot 9$

f $(3s + 5t) \cdot 7$

5.55 Notaðu réttar reiknireglur til að margfalda saman tölurnar eða bókstafina og stæður í sviga. Skráðu eins einföld svör og mögulegt er.

a $\frac{1}{3}(6a - 9)$

c $(\frac{1}{a} + 2)a$

b $4\left(\frac{3}{4} + \frac{x}{8}\right)$

d $b(b^2 - ab)$

Sýnidæmi 11

Fjórir unglingar fara í bíó. Bíómiðinn kostar b krónur. Hver unglingur kaupir einn safa á 90 kr.

- Skrifaðu algebrustæðu með sviga fyrir hve mikið unglingarnir borga samtals fyrir 4 bíómiða og 4 safa.
- Notaðu reiknireglurnar til að margfalda saman tölur og tölur í sviga til að skrifa dæmið í a-lið á annan hátt.
- Hve mikið borga unglingarnir samtals fyrir 4 bíómiða og 4 safa þegar $b = 750$ kr.?

Tillaga að lausn

- Hver unglingur borgar $b + 90$ kr. fyrir 1 bíómiða og 1 safa.

Unglingarnir borga samtals $4(b + 90)$ kr.

- $4(b + 90) = 4 \cdot b + 4 \cdot 90 = \underline{4b + 360}$

- Það er venja að reikna svarið út án þess að nefna eininguna og skrifa síðan svarið með einingunni í einni setningu. Ef $b = 750$ er svarið skrifað þannig:

$$4b + 360 = 4 \cdot 750 + 360 = 3000 + 360 = \underline{3360}$$

Unglingarnir borguðu samtals 3360 kr.

- Dag nokkurn gengur Þóra fjóra hringi á gönguskíðum. Annan dag gekk hún sjö hringi. Látum lengd brautarinnar vera v .

- Skrifaðu algebrustæðu með sviga fyrir vegalengdina sem Þóra fer samtals á gönguskíðum þessa tvo daga.
- Notaðu reiknireglurnar um að margfalda bókstafi og tölur í sviga til að reikna út úr stæðunni í a-lið.
- Hve langt gengur Þóra á skíðum þessa tvo daga samtals þegar $v = 3,5$ km?



5.57 Fjórar stelpur og fjórir strákar kaupa hvert sinn ís fyrir x krónur og drykki fyrir y krónur.

- a** Búðu til algebrustæðu fyrir hve mikið krakkarnir borga samtals.
- b** Þessir átta krakkar borga með 5000 kr.
Búðu til algebrustæðu fyrir hve mikla peninga þeir fá til baka.
- c** Stelpurnar ákveða að kaupa til viðbótar ís sem kostar helminginn af verði fyrri íssins.
Búðu til nýja algebrustæðu sem sýnir hve mikla peninga krakkarnir eiga eftir.
- d** Hve mikla peninga eiga krakkarnir afgangs ef drykkurinn kostar 150 kr. og ódýrari ísinn 100 kr.?

5.58 Viðar kaupir hringfara á 840 kr. stykkið handa öllum 25 nemendum sínum. Þar sem hann kaupir svo marga hringfara í einu fær hann þá á aðeins betra verði. Afsláttinn fyrir hvern hringfara skulum við kalla a .

- a** Búðu til algebrustæðu með sviga yfir hve mikið Viðar borgar alls fyrir 25 hringfara.
- b** Margfaldaðu upp úr sviganum í a-lið.
- c** Skrifaðu stæðu fyrir afsláttinn sem Viðar fær fyrir alla hringfarana. Hve mikið borgar Viðar samtals fyrir alla hringfarana 25 þegar $a = 100$ kr.?

5.59 Hver nemendanna hefur rétt fyrir sér?



Algebra er öflugt verkfæri þar sem niðurstöðurnar gilda án tillits til þess hvaða tölur bókstafirnir merkja. Þetta gerir það að verkum að við getum notað bókstafi til að búa til almennar reglur.

Sýnidæmi 12

Hvaða svar færðu?

- 1 Hugsaðu þér tölu,
- 2 leggðu 3 við hana,
- 3 margfaldaðu svarið með 2,
- 4 dragðu frá töluna sem þú hugsaðir þér,
- 5 leggðu 4 við og
- 6 dragðu frá töluna, sem þú hugsaðir þér, einu sinni enn.

Tillaga að lausn

1	Við hugsum okkur töluna 12.
2	$12 + 3 = 15$
3	$15 \cdot 2 = 30$
4	$30 - 12 = 18$
5	$18 + 4 = 22$
6	$22 - 12 = 10$
<u>Svarið er 10.</u>	



5.60 Hvaða svar færðu?

- a** Hugsaðu þér tölu sem er stærri en 20. Fylgdu uppskriftinni í sýnidæmi 12. Segðu bekkjarfélagi þínum hvaða svar þú færð.
- b** Hugsaðu þér neikvæða tölu. Fylgdu uppskriftinni í sýnidæmi 12. Segðu bekkjarfélagi þínum hvaða svar þú færð.
- c** Hugsaðu þér almennt brot milli 0 og 1. Fylgdu uppskriftinni í sýnidæmi 12. Segðu bekkjarfélagi þínum hvaða svar þú færð.

Sýnidæmi 13

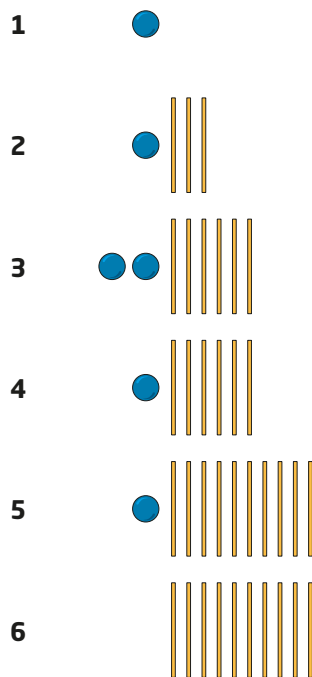
FRÁ SÝNIDÆMI 12

- 1 Hugsaðu þér tölu,
- 2 leggðu 3 við,
- 3 margfaldaðu svarið með 2,
- 4 dragðu frá töluna sem þú hugsaðir þér,
- 5 leggðu 4 við og
- 6 dragðu frá töluna, sem þú hugsaðir þér, einu sinni enn.

Fylgdu töluliðunum á spássíu. Útskýrðu með myndum hvers vegna þú færð sama svarið þrátt fyrir að þú byrjir með mismunandi tölur. Notaðu um leið algebru til að útskýra það sama.

Tillaga að lausn

Láttu bláa punktinn tákna töluna sem þú hugsar þér. Láttu einn pinna tákna töluna 1, tvo pinna tákna töluna 2 og svo framvegis. Töluliðirnir 1 til 6 verða þá þannig:



Með algebru verður þetta svona: Kallaðu töluna sem þú hugsar þér, n . Töluliðirnir 1 til 6 verða þá þannig:

$$n$$

$$n + 3$$

$$2(n + 3) = 2n + 6$$

$$2n + 6 - n = n + 6$$

$$n + 6 + 4 = n + 10$$

$$n + 10 - n = 10$$

Svarið verður 10 sama hvaða gildi n hefur.

5.61 Notaðu uppskriftina til hægri.

- a Veldu litla tölu, stóra tölu og neikvæða tölu og gerðu „galdur nr. 1“.
- b Útskýrðu galdurinn með orðum, teikningum eða algebrustæðu.

GALDUR NR. 1

- 1 Hugsaðu þér tölu
- 2 bættu 4 við hana,
- 3 margfaldaðu svarið með 2,
- 4 dragðu 5 frá og
- 5 dragðu frá tvöfalda töluna sem þú hugsaðir þér.

5.62

GALDUR NR. 2

- 1 Hugsaðu þér tölu,
- 2 leggðu 5 við hana,
- 3 margfaldaðu svarið með 3,
- 4 leggðu 9 við,
- 5 deildu með 3 og
- 6 dragðu frá töluna sem þú hugsaðir þér.

- a Veldu tölu og gerðu „galdur nr. 2“. Prófaðu með öðrum tölum. Færðu alltaf sama svar?
-  b Gerðu „galdur nr. 2“ með kubbum og pinnum eða táknum eins og í sýnidæmi 13. Láttu einn kubb eða hring tákna töluna, sem þú hugsar þér, og einn pinna eða strik tákna töluna 1. Notaðu þetta til að útskýra galdurinn.
-  c Kallaðu töluna, sem þú byrjar með, n og gerðu „galdur nr. 2“ með n . Annað þrepíð verður þá $n + 5$. Notaðu þetta til að útskýra galdurinn.
-  d Búðu til galdur. Prófaðu hann á tölu að eigin vali. Sýndu hvers vegna galdurinn virkar.

5.63

GALDUR NR. 3

- 1 Byrjaðu með árganginn sem þú ert í,
- 2 leggðu 3 við,
- 3 margfaldaðu svarið með 2,
- 4 leggðu 4 við,
- 5 leggðu 2 við ef þú hefur þegar átt afmæli í ár. Ef ekki tekur þú strax fyrir tölulið 6.
- 6 Deildu með 2.

- a Gerðu „galdur nr. 3“ og athugaðu hvort svarið segir til um aldur þinn.
- b Ólöf í 3. bekk er búin að eiga afmæli í ár. Hún er 9 ára. Virkar „galdur nr. 3“ fyrir Ólöfu?
- c Ívar í 10. bekk er ekki búinn að eiga afmæli í ár. Hann er 15 ára. Virkar „galdur nr. 3“ fyrir Ívar?
- d Prófaðu galdurinn á einhverjum sem þú þekkir. Ræddu við bekkjarfélagana þinn um hvers vegna svarið verður rétt. Sýndu það með teikningum, kubbum eða bókstöfum.



Jöfnur

Markmið

HÉR ÁTTU AÐ LÆRA AÐ

- leysa jöfnur
- kanna hvort lausn jöfnu er rétt
- nota jöfnu til að leysa vandamál úr daglegu lífi

Jafna er samsett úr tveimur algebrustæðum sem standa hvor sínum megin við jöfnumerkið. Jöfnumerkið þýðir að stæðurnar hafa sama gildi. Venja er að nota bókstafinn x til að tákna óþekkta stærðina í jöfnu ef aðeins er um eina óþekkta stærð að ræða.

Pegar þú átt að leysa jöfnu þarftu að finna hvaða tala x hlýtur að vera til að gildi stæðunnar vinstra megin við jöfnumerkið verði hið sama og gildi stæðunnar eða talan hægra megin við jöfnumerkið.

Sýnidæmi 14

Hvaða tala hlýtur x að vera til að stæðurnar báðum megin við jöfnumerkið verði jafngildar?

$$x + 2 = 3 + 5$$

Tillaga að lausn

Gildi stæðunnar hægra megin við jöfnumerkið er 8. Þá hlýtur $x + 2$ einnig að vera 8. Það þýðir að 2 stærra en x er 8. Þá hlýtur x að vera 2 minna en 8.

$x = 6$			

5.64 Hvaða tala hlýtur x að vera til að stæðurnar báðum megin við jöfnumerkið verði jafngildar?

a $x + 1 = 3 + 1$

b $2x + 1 = 8 + 1$

c $5 - 1 = x + 3$

d $x - 1 = 4 + 1$

e $2x - 3 = x + 3$

f $3x + 2 = 10 + 1$

g $2 - x = x$

h $5 - x = x + 1$

i $3x - 1 = x + 5$

j $x \cdot x = 2 \cdot x$

k $\frac{1}{2}x - 1 = 5$

l $2 \cdot x = \frac{2}{x}$

Texta breytt í jöfnu og jöfnu í orð

Þegar þú átt að finna hvaða tölu óþekkta stærðin x táknar getur verið gott að segja með orðum hvað jafnan þýðir.

Sýnidæmi 15

Búðu til jöfnu við setninguna: Talan x tvöfölduð er 24.

Tillaga að lausn

Talan x tvöfölduð er $2x$. Jafnan verður þá:

$$\underline{\underline{2x = 24}}$$

5.65

Búðu til jöfnur við setningarnar.

- a** 3 stærra en óþekkt tala er 15.
- b** 10 minna en óþekkt tala er 7.
- c** Summa tölu og tölu sem er 1 stærri en fyrrnefnda talan er 9 stærri en talan.



Sýnidæmi 16

Búðu til jöfnu við setninguna: 1 minni en tvöföld tala er 4 hærri en talan.

Tillaga að lausn

Tvöföld talan x er $2x$. Einum minni en tvöföld talan er $2x - 1$. Fjórum hærri en talan er $x + 4$. Jafnan verður þá:

$$\underline{\underline{2x - 1 = x + 4}}$$

5.66 Búðu til jöfnur við setningarnar.

- a** Helmingurinn af tölu er 7.
- b** 5 hærri en helmingurinn af tölu er 3 hærri en talan.

5.67 Búðu til jöfnur við setningarnar.

- a** Preföld óþekkt tala er 6 hærri en talan.
- b** Summa þriggja náttúrulegra talna, sem koma hver á eftir annarri, er 15 hærri en minnsta talan. (Vísbending: Kallaðu minnstu töluna x .)
- c** Sexfalt 4 meira en tala er níföld talan.
- d** Helmingurinn af tölu er 3 minna en talan.
- e** Þriðjungurinn af tölu sem búið er að bæta 10 við er jafnt og tvöföld talan.
- f** 9 stærra en ferningstala tölu er jafnt og sexföld talan.

Sýnidæmi 17

Útskýrðu jöfnuna $3x - 1 = 8$ með orðum.

Tillaga að lausn

Jöfnuna má útskýra með orðum þannig:

1 minna en þreföld tala er 8.									

5.68 Útskýrðu jöfnurnar með orðum.

- a** $5x = 35$
- b** $x - 2 = 12$
- c** $x \cdot 4 = 16$
- d** $1 + 2x = 9$
- e** $\frac{x}{3} = 5$
- f** $2x - 5 = 5$

5.69 Útskýrðu jöfnurnar með orðum.

- a** $\frac{x}{2} + 2 = 5 - x$
- b** $2(x - 1) = x + 3$
- c** $3x - 5 = 2x - 1$
- d** $x + 4 = 3x$
- e** $2x - 1 = x + 1$
- f** $\frac{x}{2} = x - 3$
- g** $3x - 5 = 2x - 1$
- h** $x(x + 2) = 15$
- i** $\frac{3 + x}{5} = 4$
- j** $\frac{1}{2}x = x - 5$
- k** $x + 6 = x \cdot x$
- l** $x + 1 = 3x - 1$



Að leysa jöfnu með útreikningi

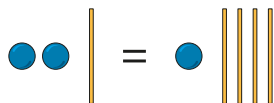
Stundum er hægt að leysa jöfnur með því að hugsa rökrétt og prófa sig áfram. Nú skaltu læra aðferðir til að þú getir leyst jöfnur þegar ekki er auðvelt að giska á lausnina.

Sýnidæmi 18

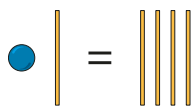
Leystu jöfnuna $2x + 1 = x + 4$.

Tillaga að lausn

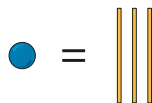
Láttu einn kubb tákna óþekkту töluna x og hvern pinna tákna 1. Þá er jafnan þessi:



Ef þú fjarlægir jafn mikið báðum megin við jöfnumerkið hlýtur gildið vinstra megin að vera áfram jafnt gildinu hægra megin. Þegar þú tekur burt einn kubb báðum megin verður jafnan svona:



og þegar þú tekur burt einn pinna báðum megin verður jafnan þessi:



x = 3

5.70 Leystu jöfnurnar með því að nota kubba og pinna eða með því að teikna þér til hjálpar.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a $2x + 1 = x + 7$ | e $3x + 5 = x + 9$ | i $5x + 2 = 2x + 11$ |
| b $x + 10 = 2x + 1$ | f $x + 10 = 4x + 1$ | j $3x + 2 = x + 6$ |
| c $x + 3 = 2x + 2$ | g $3x + 4 = 5x$ | k $5x + 1 = 2x + 19$ |
| d $5x + 1 = 4x + 5$ | h $4x + 7 = 7x + 4$ | l $2x + 1 = x + 3$ |

Sýnidæmi 19

Þú átt að finna út hve margir molar eru í nokkrum öskjum með því að nota jafnvægisvog. Þar að auki eru nokkrir lausir molar. Vitað er að 3 öskjur og 2 lausir molar vega jafn mikið og 2 öskjur og 7 lausir molar. Láttu x tákna fjölda mola í hverri öskju. Þá eru $3x + 2$ molar öðrum megin á vogarskálinni og $2x + 7$ molar á hinni. Leystu jöfnuna með útreikningi. Athugaðu síðan hvort lausnin er rétt.

Fjarlægðu 2 öskjur (x) úr hvorri vogarskál.

Fjarlægðu 2 mola báðum megin.

Tillaga að lausn

$$3x + 2 = 2x + 7$$

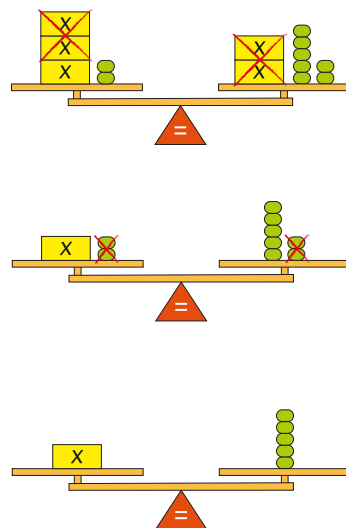
$$3x - 2x + 2 = 2x - 2x + 7$$

$$x + 2 = 7$$

$$x + 2 - 2 = 7 - 2$$

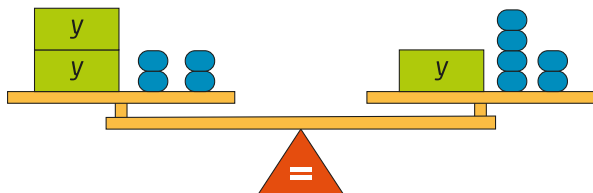
$$x = 5$$

Það eru 5 molar í hverri öskju.

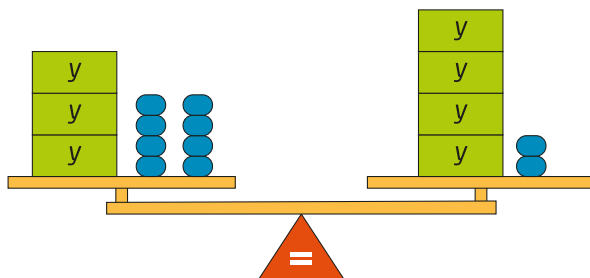


5.71 Finndu gildið á y . Athugaðu hvort lausnin er rétt.

a



b



Jöfnumerkið í jöfnu táknar að stæðurnar hvor sínar megin við jöfnumerkið eru jafngildar. Það þýðir að stæðurnar verða áfram jafngildar þótt þú bætir við, dragir frá, margfaldir eða deilir með sömu tölu báðum megin við jöfnumerkið.

Sýnidæmi 20

Leystu jöfnuna $7x = 4x + 15$. Athugaðu síðan hvort lausnin er rétt.

Tillögur að lausn

$$\begin{array}{rcl}
 7x & = & 4x + 15 \\
 7x - 4x & = & 4x - 4x + 15 \quad | -4x \\
 3x & = & 15 \\
 \frac{3x}{3} & = & \frac{15}{3} \quad | :3 \\
 x & = & 5
 \end{array}$$

Dragðu $4x$ frá báðum megin við jöfnumerkið.

Deildu með 3 báðum megin við jöfnumerkið.

Athugaðu hvort lausnin er rétt með því að setja $x = 5$ inn í jöfnuna sem þú byrjaðir með: $7x = 4x + 15$:

Vinstri hlið, $7x$	Hægri hlið, $4x + 15$
$7 \cdot 5 = 35$	$4 \cdot 5 + 15 = 20 + 15 = 35$

Stæðan, sem er vinstra megin við jöfnumerkið, og sú sem er hægra megin, eru jafngildar þegar $x = 5$. Það þýðir að lausnin $x = 5$ er rétt.



Þegar athugað er hvort lausnin er rétt með því að setja hana inn fyrir x er oft talað um að *prófa lausnina*.

5.72 Leystu jöfnurnar með útreikningi. Athugaðu hvort lausnirnar eru réttar.



a $x + 8 = 23$

b $x - 10 = 42$

c $2x = x + 5$



d $3x + 5 = x + 9$

e $2x = 150 - x$

f $5x - 9 = 2x - 3$



g $8x - 1 = 31$

h $7x + 4 = 22 - 2x$

i $\frac{1}{2}x - 1 = 2 - x$

5.73 Leystu jöfnurnar.

a $x + 8,4 = 30$

c $x - 15,3 = 17,9$

e $3x - 9,2 = 0,7$

b $x + 2,6 = 9,3$

d $x + (5,2 + 3,4) = 9,1$

f $3,5x - 2,8 = x + 2,2$

Sýnidæmi 21

Leystu jöfnuna $3x - 7 = 5x + 1$.

Tillaga að lausn

$$\begin{array}{l}
 3x - 7 = 5x + 1 \\
 3x - 5x - 7 = 5x - 5x + 1 \quad | - 5x \\
 -2x - 7 = 1 \\
 -2x - 7 + 7 = 1 + 7 \quad | + 7 \\
 -2x = 8 \\
 \frac{-2x}{-2} = \frac{8}{-2} \quad | : (-2) \\
 \frac{-2x}{-2} = \frac{8}{-2} \\
 x = -4
 \end{array}$$

Dragðu $5x$ frá báðum megin við jöfnumerkið.

Bættu 7 við báðum megin við jöfnumerkið.

Deildu með -2 báðum megin við jöfnumerkið.

Regla um að leysa jöfnur:

Jafna felur í sér tvær stæður, eina hvorum megin við jöfnumerkið.

Stæðurnar verða áfram jafngildar ef

- 1) jafn mikið er lagt við eða dregið frá báðum megin við jöfnumerkið
- 2) báðar hliðar jöfnunnar eru margfaldaðar eða deilt í þær með sömu tölu – nema 0 .

5.74 Leystu jöfnurnar. Prófaðu lausnirnar.

a $10x - 30 = 5x$

d $5x - 2 = 4x + 13$

g $10x + 4 = 15x - 11$

b $5x - 13 = 2x - 4$

e $2x + 12 = 3x + 9$

h $2(x - 1) = 3(x - 2)$

c $4x + 3 = 2x + 11$

f $7x - 4 = 6x + 8$

i $7x + 3 = 5(x + 1)$

5.75 Leystu jöfnurnar með því að prófa þig áfram eða með útreikningi. Prófaðu lausnirnar.

a $3x + 3 = 8 + 5x$

b $2x + 4 - 4x - 3 = 4x - 1 - 9x + 10$

c $6,1 - 4x + 0,7x = -0,5$

d $9x - 10 + 3x = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

5.76 Leystu jöfnurnar. Prófaðu lausnirnar.



a $x + 10 = 2$



b $3x + 12 = 6$



c $4m - 5 = 2m - 10$



d $2m + 10 = 7m - 50$



e $n - 10 = \frac{1}{2}n$



f $12,5 - n = 2,5 + 1,5n$

5.77 Leystu jöfnurnar með því að prófa þig áfram eða með útreikningi. Prófaðu lausnirnar.

a $\frac{1}{2}x = 20$

c $\frac{2}{3}x = 20$

b $\frac{x}{5} = 20$

d $\frac{3x}{4} = 15$

5.78 Leystu jöfnurnar. Prófaðu lausnirnar.

a $3(x + 5) + 1 = 2x + 14$

d $4(x - 3) = 3(x + 1)$

b $6x - 5 = (2x - 1) \cdot 4$

e $3(x + 1) - 4 = 2x + 3$

c $\frac{3}{2}(2x + 4) = \frac{1}{4}(4 - 8x)$

f $\frac{1}{3}(3x + 6) = 7$

5.79 Leystu jöfnurnar. Prófaðu lausnirnar.

a $25(x - 1) = 2x + 90$

b $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 3$

c $3,5(2x - 1) = 0,5(2x + 5)$

d $\frac{3+x}{5} = 4$

e $\frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 1)$

f $3x - 1 = 4(x + 2)$

g $\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{4}x = \frac{2}{3}$

h $\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{2}$

5.80 Leystu jöfnurnar. Prófaðu lausnirnar.

a $2x + 13 = 3x + 20$

b $3x + 7 = -5$

c $y + 2 = \frac{1}{2}y + 10$

d $5y + 2 = 3y - 8$

e $1,3r = 3,9$

f $7,4x + 5,2 = 10,2 + 4,9x$

g $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x$

h $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = (x - 1)$

i $\frac{x}{5} = \frac{1}{10}$

j $\frac{1}{4} = \frac{3}{x}$

5.81 Við hverja af jöfnunum þremur eru fjórar tillögur að lausnum. Ein þeirra er rétt. Prófaðu lausnirnar og finndu hver þeirra er sú rétta.

a $6x + 11 = 35$

$x = 1$

$x = 2$

$x = 3$

$x = 4$

b $5x - 32 = 3x - 20$

$x = 4$

$x = 6$

$x = 8$

$x = 10$

c $\frac{13x + 12}{3} = 5x + 2$

$x = 0$

$x = 2$

$x = 3$

$x = 6$

5.82 Hver nemendanna hefur rétt fyrir sér?

Fullyrðing
 $5 + x = 5 + y$

Ali
Petta er satt. Beggja megin við jöfnumerkið stendur „5 plús bókstafur“.

Katrín
Petta er aldrei satt. x og y eru ekki sama talan.

Hamíð
Petta passar ekki. Ef til dæmis $x = 1$ og $y = 2$ fæst $6 = 7$ og það er ekki satt.

Svava
Petta getur verið satt. Það er fer eftir hvaða tölur x og y eru.

Óuppsettar jöfnur

Pegar þú átt að leysa verkefni úr daglegu lífi getur oft verið gagn í því að skrá verkefnið sem jöfnu sem þú getur leyst. Þegar þú hefur leyst jöfnuna þarftu að túlka lausnina og finna hvað hún þýðir í verkefninu sem um ræðir.

Sýnidæmi 22

Rúna, Ída, Alda og Eva gera 162 kviðæfingar samtals. Rúna gerir 5 sinnum fleiri kviðæfingar en Ída. Eva gerir 35 kviðæfingum fleiri en Ída. Alda gerir 12 færri kviðæfingar en Eva. Hve margar kviðæfingar gerir Ída?

Tillaga að lausn

Táknaðu fjölda kviðæfinga, sem Ída gerir, með bókstafnum x . Út frá upplýsingunum í verkefninu getur þú sett upp þessar algebrustæður sem tákna fjölda kviðæfinga hjá hverri af stelpunum fjórum.

Ída gerir x kviðæfingar.

Rúna gerir $5x$ kviðæfingar.

Eva gerir $x + 35$ kviðæfingar.

Alda gerir $(x + 35) - 12 = x + 35 - 12 = x + 23$ kviðæfingar.

Stelpurnar gera 162 kviðæfingar samtals. Jafnan verður þá þessi:

$$x + 5x + (x + 35) + (x + 23) = 162$$

$$x + 5x + x + 35 + x + 23 = 162$$

$$8x + 58 = 162$$

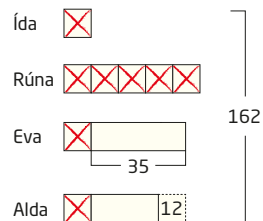
$$8x + 58 - 58 = 162 - 58 \quad | - 58 \quad \leftarrow \text{Dragðu 58 frá báðum megin við jöfnumerkið.}$$

$$8x = 104$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{104}{8} \quad | : 8 \quad \leftarrow \text{Deildu með 8 báðum megin við jöfnumerkið.}$$

$$x = 13$$

Ída gerir 13 kviðæfingar.



Ída	X	17
Bróðir	X 3	

5.83 Skráðu hvert dæmi sem jöfnu og leystu hana.

- a** Bróðir Ídu er 3 árum eldri en hún.
Hve gömul er Ída ef hún og bróðirinn eru samtals 17 ára?
Hvað er bróðirinn gamall?
- b** Ásta er 2 árum eldri en Birna. Birna er 2 árum eldri en Sylvía. Ásta, Birna og Sylvía eru samtals 99 ára.
Hve gömul er Birna? Hve gamlar eru Ásta og Sylvía?
- c** Erpur er 2 árum yngri en Páll. Aldur Péturs er tvöfaldur aldur Páls. Bræðurnir Erpur, Páll og Pétur eru samtals 38 ára.
Hvað er Erpur gamall? Á hvaða aldri eru hinir bræðurnir?
- d** Kasper er 4 árum eldri en Jesper. Jónatan er helmingi yngri en Kasper verður eftir 4 ár. Ræningjarnir þrír eru samtals 73 ára.
Hversu gamall er Jónatan? Hversu gamlir eru hinir ræningjarnir?

5.84 Skrifaðu hvert verkefni sem jöfnu og leystu hana.

- a** Í frímerkjabók Jóns eru 16 blaðsíður með jafn mörgum frímerkjum á hverri. Alls á Jón 576 frímerki.
Hve mörg frímerki eru þá á hverri blaðsíðu?
- b** Pálína skiptir striki í 11 hluta. Hver hluti er 8,2 cm á lengd.
Hve langt er strikið í heild?

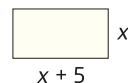
5.85 Skráðu hvert dæmi sem jöfnu og leystu hana.

- a** Þegar þú leggur 7 við ákveðna tölu verður svarið 12.
Hver er talan?
- b** Þegar þú bætir 3 við ákveðna tölu og deilir síðan í summuna með 2 verður svarið 7.
Hver er talan?
- c** Tala er 3 stærri en önnur tala. Summa þessara tveggja talna er 45.
Hver er minni talan?
- d** Summa þriggja heilla talna, sem koma hver á eftir annarri í talnaröðinni, er 42.
Hver er minnsta talan?
- e** Ef tala er margfölduð með 5 verður hún 34 stærri en þreföld upphaflega talan. Hver er talan?

5.86 Skráðu hvert dæmi sem jöfnu og leystu hana.

- a** Gatari kostar 690 kr. meira en strokleður. Samtals kosta gatarinn og strokleðrið 1090 kr.
Hvað kostar strokleðrið?
- b** Níels tínir helmingi meira af berjum en Marteinn. Samtals tína þeir 18 kg.
Hve mörg kíló tínir Níels?
- c** Hestur ásamt knapanum vegur 615 kg. Hesturinn vegur 485 kg meira en knapinn.
Hvað vegur knapinn?
- d** Summa tveggja sléttra talna, sem koma hvor á eftir annarri í talnaröðinni, er 46.
Hver er minni talan?
- e** Summa tveggja talna er 80. Önnur talan er fjórum sinnum stærri en hin.
Hver er minni talan?
- f** Anna kaupir peru, sem kostar 140 kr., og 3 epli.
Kristín kaupir 5 epli. Þær borga jafn mikið.
Hvað kostar eitt epli?

5.87 Skráðu verkefnið sem jöfnu og leystu hana.
Lengd rétthyrnds jarðarskika er 5 m stærri en breiddin.



Hver er breiddin þegar ummál skikans er 254 m^2 ?

5.88 Byrjaðu með eina af jöfnunum í bláa rammanum. Bættu við, dragðu frá, margfaldaðu eða deildu með sömu tölu báðum megin við jöfnumerkið þannig að þú fáið einhverja jöfnuna í gula rammanum. Paraðu þannig saman jöfnurnar í bláa og gula rammanum.

$$5 + 4x = 3x + 2$$

$$4x + 3 = 5 + 2x$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 4x + 5$$

$$3x + 5 = 4x + 2$$

$$x + 6 = 8x + 10$$

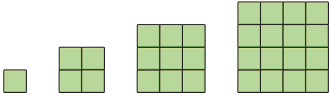
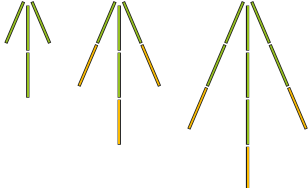
$$5x + 5 = 4x + 2$$

$$4 + 3x = 4x + 1$$

$$4x + 6 = 2x + 8$$

Í stuttu máli

Í algebru reiknum við með stæðum sem geta innihaldið bæði bókstafi, tölur og aðgerðartákn. Bókstafirnir tákna tölur og á að meðhöndla eins og tölur. Tölurnar, sem bókstafirnir tákna, eru óþekktar og kallast breytur.

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
borið kennsl á mynstur mynda og talna	Hvers konar mynstur er þetta?  1 4 9 16	Mynstrið er búið til með ferningum þar sem hliðarlengdirnar eru 1, 2, 3 og 4. Tölurnar eru <u>fjórar fyrstu ferningstölurnar.</u>
haldið áfram með mynstur	Hver er næsta tala? 2, 3, 6, 11, 18, ...	Mismunur milli talnanna er 1, 3, 5 og 7. Mismunur milli 18 og næstu tölu er 9. <u>Næsta tala er $18 + 9 = 27$.</u>
útskýrt með orðum, formúlum og táknum hvernig mynstur er byggt upp. Pú getur notað bókstafi til að búa til formúlu sem lýsir mynstri. Þegar þú átt að finna ákveðið talnamynstur skaltu - finna það sem er sameiginlegt tölunum sem mynda mynstrið - finna hvernig þú getur fundið næstu tölu í mynstrinu - búa til formúlu fyrir tölurnar í mynstrinu þegar þú veist hvaða númer talan hefur	 Mynd 1 Mynd 2 Mynd 3 Finndu myndtölur myndanna. Skrifaðu með orðum hvaða mynstur myndtölurnar búa til. Búðu til rakningarformúlu og beina formúlu fyrir myndtölu númer n .	Myndtölurnar eru <u>$m_1 = 4$, $m_2 = 7$ og $m_3 = 10$.</u> Hver tala er 3 stærri en talan á undan. <u>Mynstrið byrjar á tölunni 4.</u> Rakningarformúlan fyrir mynd númer n er <u>$m_n = m_{n-1} + 3$.</u> Beina formúlan fyrir mynd númer n er <u>$m_n = 1 + n \cdot 3 = 1 + 3n$.</u>

Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum				
leyst jöfnur Þú getur leyst jöfnur með því að gera það sama báðum megin við jöfnumerkið.	Leystu jöfnuna $x + 7 = 2x - 5.$	$x + 7 = 2x - 5$ $x + 7 - 7 = 2x - 5 - 7 \quad -7$ $x = 2x - 12$ $x - 2x = 2x - 12 - 2x \quad -2x$ $-x = -12$ $\frac{-x}{-1} = \frac{-12}{-1} \quad :(-1)$ $x = \underline{\underline{12}}$				
prófað hvort lausn jöfnu er rétt Til að prófa lausn jöfnu þarftu að setja gildið, sem þú fannst, inn í upphaflegu jöfnuna og athuga hvort stæðurnar vinstra og hægra megin við jöfnumerkið eru jafngildar.	Prófaðu hvort $x = 12$ er rétt lausn á jöfnunni $x + 7 = 2x - 5.$	<table><tr><th>Vinstri hlið, $x + 7$</th><th>Hægri hlið, $2x - 5$</th></tr><tr><td>$12 + 7 = 19$</td><td>$2 \cdot 12 - 5 =$ $24 - 5 = 19$</td></tr></table> Báðar hliðar jöfnunnar hafa gildið 19. Það þýðir að $x = 12$ er rétt lausn á jöfnunni.	Vinstri hlið, $x + 7$	Hægri hlið, $2x - 5$	$12 + 7 = 19$	$2 \cdot 12 - 5 =$ $24 - 5 = 19$
Vinstri hlið, $x + 7$	Hægri hlið, $2x - 5$					
$12 + 7 = 19$	$2 \cdot 12 - 5 =$ $24 - 5 = 19$					

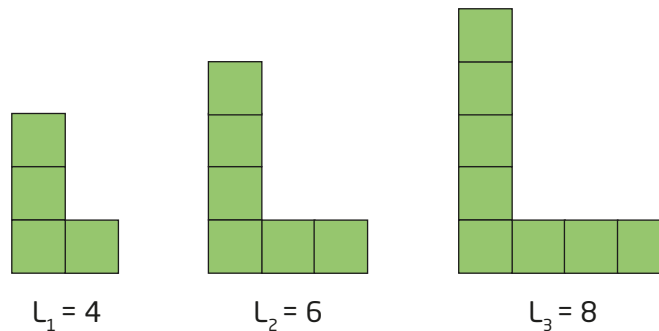
Pú átt að geta	Dæmi	Tillögur að lausnum
notað jöfnur til að leysa dæmi úr daglegu lífi	Tveir kassar vega samtals 80 kg. Annar vegur 25 kg meira en hinn. Hvað er hvor kassi þungur?	Látum léttari kassann vega x kg. Þá vegur hinn kassinn $x + 25$ kg. Samtals vega kassarnir $x + x + 25 = 80$ kg. Þú færð jöfnuna $x + x + 25 = 80$. $x + x + 25 = 80$ $2x + 25 = 80$ $2x + 25 - 25 = 80 - 25 \quad - 25$ $2x = 55$ $\frac{2x}{2} = \frac{55}{2} \quad : 2$ $x = 27,5$ $x + 25 = 27,5 + 25 = 52,5$ <u>Léttari kassinn vegur 27,5 kg og þyngri kassinn vegur 52,5 kg.</u>



Bættu þig!

Að kanna mynstur

5.89 Finndu mynstur sem sýnir hve margir reitir eru í hverri mynd.



- a** Finndu L_4 , það er að segja hve margir reitir eru í mynd 4. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- b** Finndu L_5 , það er að segja hve margir reitir eru í mynd 5. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- c** Finndu L_6 , það er að segja hve margir reitir eru í mynd 6. Gott er að nota rúðustrikað blað og teikna myndirnar á það.
- d** Skrifaðu með orðum hve margir reitir eru í næstu mynd.
- e** Gefið er að $L_{20} = 42$. Notaðu uppgötvun þína í d-lið til að finna L_{21} .
- f** Skrifaðu með orðum hve margir reitir eru í mynd númer n , það er að segja L_n þegar þú veist hve margir reitir eru í næstu mynd á undan, þ.e. í L_{n-1} .
- g** Finndu L_{100} án þess að reikna út myndtölurnar fyrir framan.
- h** Láttu n tákna hvaða myndnúmer sem er og búðu til formúlu fyrir L_n . Notaðu formúluna til að finna L_{50} .
- i** Hvaða númer hefur stærsta myndin sem þú getur búið til með 80 reitum?



5.90 Notaðu fyrsta bókstafinn í nafninu þínu eða einhvern annan bókstaf sem þú hefur ekki teiknað eða notað í myndir áður.

- a** Teiknaðu bókstafinn á rúðustrikað blað eða notaðu kubba til að búa hann til. Þú átt að ákveða hvernig minnsti bókstafurinn á að vera og hvernig hann á að stækka.
- b** Teiknaðu eða búðu til þrjár næstu myndir (bókstafi). Skrifaðu myndtölurnar undir hverja mynd.
- c** Segðu einhverjum bekkjarfélaganum þínum hvaða bókstaf þú teiknaðir eða bjóst til. Lýstu hvernig minnsti bókstafurinn lítur út og hvernig þú getur fundið myndtölur hvernar myndar. Bið þú nú bekkjarfélaganum þínum að teikna eða búa til fjórar fyrstu myndirnar. Mundu að sýna honum ekki myndirnar þínar! Gakktu síðan úr skugga um hvort myndir bekkjarfélagans eru eins og þínar myndir.
- d** Skrifaðu með orðum hvernig þú getur fundið myndtölur myndanna þinna.
- e** Finndu myndtölu myndar númer 5.
- f** Skrifaðu með orðum hvernig þú getur fundið myndtölu myndar númer n , það er m_n út frá myndtölu myndarinnar næst á undan, m_{n-1} . Finndu m_6 . Teiknaðu mynd 6 og athugaðu hvort það sem þú fannst er rétt.
- g** Hvaða myndnúmer getur þú búið til ef þú mátt nota 20 reiti í bókstafinn sem þú valdir?
- h** Búðu til beina formúlu fyrir hvernig þú getur fundið myndtöluna m_n , þ.e. myndtölu myndar númer n . Finndu m_6 . Athugaðu hvort það sem þú fannst passar við svarið í f-lið.
- i** Hvaða númer hefur stærsta myndin sem þú getur búið til á einni blaðsíðu í reikningsheftinu þínu?



Algebrustæður

5.91 Skjaldbaka Péturs er k ára. Eftir 1 ár verður hún $k + 1$ ára. Fyrir 2 árum var hún $k - 2$ ára. Búðu til algebrustæður fyrir aldur skjaldbökunnar og ljúktu við að fylla töfluna út.

Tími	Aldur skjaldbökunnar (ár)
Núna	k
Eftir 1 ár	$k + 1$
Eftir 2 ár	
Eftir 10 ár	
Fyrir 2 árum	$k - 2$
Fyrir 3 árum	
Fyrir 10 árum	
Pegar núverandi aldur skjaldbökunnar hefur tvöfaldast	
Pegar aldur skjaldbökunnar var helmingur af núverandi aldri hennar	

5.92 Skrifaðu dæmin sem algebrustæður.

- ☒ **a** Lísá er a ára.
Hve gömul var Lísá fyrir 5 árum?
- ☐ **b** Rúnar er b ára.
Hve gamall var Rúnar þegar hann var helmingi yngri en hann er nú?
- ☐ **c** Róbert er c ára. Sverrir er þremur árum eldri en tvöfaldur aldur Róberts.
Hve gamall er Sverrir?

5.93 Skrifaðu dæmin sem algebrustæður.

- ☒ **a** 5 miðar kosta k krónur.
Hvað kostar einn miði?
- ☐ **b** Björn kaupir 4 vatnsflöskur og eina pitsu. Pitsan kostar 1500 kr.
Ein vatnsflaska kostar m krónur.
Hve mikið borgar Björn samtals fyrir vatnsflöskuna og pitsuna?
- ☐ **c** Inga hleypur vegalengd sem er tvöföld vegalengd Hönnu.
Páll hleypur 4 km styttra en Hanna. Páll hleypur n km.
Hve langt hleypur Inga?



5.94 Einfaldaðu algebrustæðurnar A–L.
Finndu hvaða stæður A–L passa við hvaða stæðu a–l.

A $7a + 3b - a + 4$

B $6 \cdot 4a$

C $8a + 6a - 5a$

D $6 - 2a + 8a$

E $3 \cdot 3a - 1$

F $5a + 6a$

G $2a - a$

H $b - 3a + 2b - 3$

I $2(4a + 3)$

J $(a + 2) \cdot 3$

K $5(3a + 1) - 2 \cdot (2a)$

L $3 + 2(3a + b)$

a a

b $11a$

c $11a + 5$

d $-3a + 3b - 3$

e $9a$

f $24a$

g $6a + 2b + 3$

h $6a + 3b + 4$

i $3a + 6$

j $6a + 6$

k $8a + 6$

l $9a - 1$

5.95

TÖFRABRAGÐ NR. 4

- 1 Kallaðu tölu t ,
- 2 margfaldaðu töluna t með 3,
- 3 bættu 5 við,
- 4 dragðu tvöfalda töluna t frá,
- 5 bættu 6 við og
- 6 dragðu töluna t frá.

- a** Hvaða svar færðu?
- b** Búðu til svipað töfrabragð þar sem svarið verður hið sama án tillits til þess hvaða tölu þú byrjar með.
Prófaðu töfrabragðið þitt á einhverjum í bekkjardeildinni.



5.96 a Fylltu út í töfluna með réttum stæðum og tölum.

Algebrustæður	Stæðurnar einfaldaðar	Settu $k = 3$, $m = 5$, $n = 2$, og reiknaðu	Bókstafur
$8k - 2k$	$6k$	$6 \cdot 3 = 18$	O
$2 \cdot (m + n) + m$			F
$3m + 20 + 5m - n$			V
$4 \cdot (k - 2) + 3k$			R
$m + 5 + m \cdot (2 + 5)$			P
$5n - 2n$			A
$2 \cdot (2k + 1) + 2 \cdot (2k + 1)$			T
$9 + 5 \cdot (m - 1) + 4m$			E
$3 \cdot (k + 2n) - 6n$			?
$2k + 5m - 3k + m$			S
$5 - 3k + 12 + 2k - 4$			N
$5 \cdot (n - 3) + 8$			L
$k + m + n + 2 \cdot (m + n)$			Ð
$3m - k + 20 - 5m - k$			K
$(6 - m + 2k) \cdot 3$			I
$10k : 6 - m$			Y
$2 \cdot (m - 5) + 4 \cdot 4 + 4$			U

- b Fyrir hverja stæðu í töflunni færðu talnasvar. Í dálknum lengst til hægri standa bókstafir sem tilheyra talnasvörum. Þú sérð til dæmis að O tilheyrir 18. Skrifaðu réttan bókstaf fyrir ofan hvert talnasvar í reitunum hér fyrir neðan. Hvað stendur skrifað?

58 6 13

10 18 4 4 20 24

49 13 19 21 28 28

6 24

3 49 0 27 6

45 49 27 27 6

45 13 6 20 28 9

Jöfnur

5.97 Leystu jöfnurnar. Athugaðu hvort svarið passar við jöfnurnar.

a $3x + 5 = 2x + 10$

c $x + 5 = 11 - x$

b $2x - 8 = 6$

d $4x + 7 = 5(1 + x)$

5.98 Búðu til jöfnu við hvert verkefni. Leystu jöfnurnar og skrifaðu setningar sem lýsa því hvað lausnirnar þýða.

a Lengd körfuboltavallar er 13 m lengri en breiddin.
Lengdin er 28 m. Kallaðu breiddina x .

b Lengd handboltavallar er tvöföld breiddin.
Lengdin er 40 m. Kallaðu breiddina x .

c Fálkinn getur flogið með allt að 110 km hraða á klst. Það er tvöfaldur
hlaupahraði refsins. Kallaðu hraða refsins x .

d Marsvín getur orðið u.þ.b. 8 ára. Það er 2 árum styttra en $\frac{1}{10}$ af
mögulegum lífaldri skjaldböku. Kallaðu lífaldur skjaldbökkunnar x .

5.99 Leystu jöfnurnar. Prófaðu síðan lausnirnar.

a $4x + 5 = 3x + 12$

e $6y - 18 = 2y - 10$

b $2y - 10 = y + 40$

f $2z + 10 = 7z - 50$

c $z - 20 = 5$

g $\frac{x}{4} = 12$

d $3x + 10 = x + 20$

h $x - 6 = \frac{1}{2}x$

5.100 Skrifaðu setningu um hvað jöfnurnar segja um töluna x .
Leystu jöfnurnar og prófaðu síðan lausnirnar.

a $5x = 55$

d $\frac{x}{3} = 6$

b $\frac{x}{3} = 20$

e $\frac{3x}{2} = 15$

c $\frac{x}{2} + 2x = 10$

f $x \cdot x = 9$





5.101 Finndu þína eigin aðferð til að leysa verkefnin hér á eftir.
Segðu bekkjarfélaga þínum hvernig þú leystir þau.

- a** Kristín selur miða á tombólu á laugardegi og sunnudegi. Einn miði kostar 150 kr. Kristín selur fyrir samtals 3450 kr. um helgina. Á sunnudeginum selur hún miða fyrir samtals 2100 kr.

Hve marga miða selur Kristín á laugardeginum?

- b** Marteinn og Viðar opna hvor sinn sparireikning. Marteinn setur kr. 50 000 inn á reikninginn. Því næst leggur hann 10 000 kr. inn mánaðarlega. Viðar setur 25 000 kr. inn á reikninginn í upphafi og leggur síðan 15 000 kr. inn mánaðarlega.

Eftir hve langan tíma eiga Marteinn og Viðar jafn mikið á reikningunum?
Ekki reikna vexti með.

- c** Amanda er 12 ára. Faðir Amöndu er 41 árs.

Eftir hve mörg ár er aldur föðurins nákvæmlega tvöfaldur aldur Amöndu?

5.102 Pétur á tvö börn, Kristín og Mía. Eftir þrjú er aldur Kristíns jafn tvöföldum aldri Más. Mía er fjórum árum yngri en Kristinn.

- a** Hve gamall er Kristinn nú?

- b** Eftir þrjú ár er aldur Más og Kristíns samtals $\frac{3}{8}$ af aldri Péturs.
Hve gamall er Pétur?

5.103 Skrifaðu hvert verkefni sem jöfnu og leystu hana.

- a** María, Júlía og Ágústa skipta 6300 kr. milli sín. María fær þrefalda upphæðina sem Júlía fær. Júlía fær tvöfalda upphæðina sem Ágústa fær.
Hve mikið fær Ágústa?

- b** Nokkrar vinkonur fara á kaffihús. Allar kaupa kaffibolla á 300 kr. og kökustykki á 500 kr. Þær borga samtals 4800 kr.

Hve margar voru vinkonurnar?

- c** Pétur kaupir popp fyrir 250 kr. og fjórar gosflöskur. Páll kaupir popp fyrir 550 kr. og tvær gosflöskur. Strákarnir tveir borga jafn mikið.

Hvað kostar ein gosfloska?

- d** Í Algebruskóla eru 168 nemendur í 1.–4. bekk. Af þessum nemendum er sá fjöldi, sem sækir frístundaheimili, þrefaldur sá fjöldi sem sækir ekki slík heimili.

Hve margir nemendur sækja frístundaheimili?

Þjálfaðu hugann

- **5.104** Summa fimm náttúrlegra talna, sem koma hver á eftir annarri í talnaröðinni, er 40. Hvaða tölur eru þetta? Hugsaðu rökrétt og prófaðu þig áfram.
- **5.105** Fimm náttúrlegar tveggja stafa tölur koma hver á eftir annarri í talnaröðinni. Þversumma allra talnanna er samtals 30. Hverjar eru tölurnar? Hugsaðu rökrétt og prófaðu þig áfram.
- **5.106** Fimm náttúrlegar tveggja stafa tölur koma hver á eftir annarri í talnaröðinni. Þversumma allra talnanna samtals er 42. Kallaðu minnstu töluna ab þar sem a táknar tölustafinn í tugasetinu og b tölustafinn í einingasetinu. Búðu til bókstafastæðu fyrir hinar tölurnar og skráðu stæðu fyrir þversummuna. Sýndu að þú þarft að fara yfir tug. Finndu tölurnar með útreikningi.

Þversumma er summa tölustafa í tölu. Þversumma tölunnar 58 er $5 + 8 = 13$. Þversummur talnanna 58, 59 og 60 eru samtals $5 + 8 + 5 + 9 + 6 + 0 = 33$.

- 5.107** Veldu fjórar tölur úr $2 \cdot 2$ reitum í töflunni til hægri, til dæmis 7, 8, 12 og 13. Margfaldaðu tölurnar saman, þannig:

$$8 \cdot 12 = 96$$

$$7 \cdot 13 = 91$$

Finndu mismun svaranna, þannig:

$$96 - 91 = 5$$

- a** Prófaðu með ýmsum tölum í $2 \cdot 2$ reitum á sama hátt og sýnt er hér á undan.

Hvað kemur í ljós?

- b** Útskýrðu mynstrið sem þú fannst í a-lið. Notaðu bókstafareikning til að útskýra mynstrið. Kallaðu minnstu töluna í $2 \cdot 2$ reitamynstrinu x .

Settu upp algebrustæðu fyrir hinar þrjár tölurnar. Gerðu útreikningana í a-lið með bókstöfum.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Orðskýringar

A	
aðgerðartákn	tákn sem sýnir hvaða reikniaðgerð á að nota, til dæmis samlagningu eða frádrátt
afsláttur	lækkun á vöruverði
afstæð tilvísun í reit	felur í sér að formúlan er aðlöguð og breytist þegar maður afritar hana yfir í annað hólfi í töflureikni
algebrugluggi	í rúmfræðiforritum inniheldur algebruglugginn meðal annars hnit punkta og jöfnur
algebrustæða	stærðartákn þar sem öllum tölunum eða einhverjum þeirra er skipt út fyrir bókstafi. Bókstafirnir í algebrustæðu tákna óþekktar tölur.
alhæfa	láta niðurstöður gilda fyrir stærra safn eða hóp en þann sem niðurstöðurnar fengust úr
almennt brot	tala sem skrifa má með teljara, nefnara og brotastriki. Teljarinn og nefnarinn eru heilar tölur, nefnarinn er ekki 0. Brotastrikið má lesa sem deilingarmerki. Heilar tölur má einnig líta á sem almenn brot þar sem nefnari er 1 eða nefnari gengur upp í teljarann.
altæk tilvísun í reit	felur í sér að formúlan í heild eða hlutar af henni „læsast“ þegar hún er afrituð. Þú læsir altækri tilvísun með því að nota dollaratáknið \$.
armur horns	önnur af hálfhlínunum tveimur sem mynda horn. Hægri og vinstri armur horns ganga út frá oddpunkti hornsins.
aukastafir	tölustafir hægra megin við kommuna í tugabroti. Fyrsti aukastafurinn sýnir tíundu hluta, annar aukastafurinn sýnir hundraðshluta o.s.frv.
B	
bein formúla	formúla sem gefur myndtöluna í talnamynstri beint frá myndnúmerinu
beint horn	horn sem er 180° ; hornið myndar því beina línu
blandin tala	er samsett úr heilli tölu og eiginlegu broti
bogi	hluti hringferils
bókstafareikningur	reikningur með bókstöfum sem tákn fyrir tölur og breytur
bókstafastæða	táknar það sama og algebrustæða
breidd flokka	mismunur á hæsta og lægsta gildi talnasviða sem gögnum er skipt í
breyta (í algebru)	tákn sem merkir gildi tölu sem getur breyst
breyta (í tölfræði)	ýmis breytileg gögn sem eru til rannsóknar. Breyturnar geta verið tölur eða texti.
D	
dálkur í töflureikni	lóðrétt röð hólfa (hólfín sem koma hvert undir öðru). Dálkarnir í töflureikni eru merktir með bókstöfum.
deiling	það að deila
deilir	talann sem deilt er með
deilistofn	tala sem á að deila í með annarri tölu; samsvarar teljaranum í almennu broti
dreifing	mál sem sýna dreifingu, segja til um hvernig gagnasafn dreifist; spönn er algengt mál sem lýsir dreifingu
E	
eiginlegt brot	brot sem hefur gildi milli 0 og 1. Nefnarinn er alltaf stærri en teljarinn.
einingarbrot	almennt brot þar sem teljarinn er 1
einslæg horn	horn með annan arminn sameiginlegan. Við samsíða línur eru þessi horn alltaf jafn stór.
endapunktur	lokapunktur, afmarkar strik
F	
fasti	gildi sem breytist ekki
ferningstala	margfeldi tveggja jafn stórra náttúrulegra talna: 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 og svo framvegis. Fyrstu feringstölurnar eru 1, 4, 9 og 16. Allar feringstölur má skrifa sem veldi með veldisvísinum 2.
ferningur	rétthyrningur þar sem allar hliðarnar eru jafn langar
flatarmál	mælitala sem segir til um hve stór flötur er. Við notum t.d. m^2 (fermetra) til að gefa upp stærðir flata (flatarmálið). Ef um litla fleti er að ræða notum við cm^2 (fersentimetra); ef fletirnir eru stórir notum við km^2 (ferkilómetra).
flokkaskipt gögn	gögn sem skipt er í mismunandi flokka til að auðvelda yfirsýn
flutningur	samheiti yfir speglun, snúning og hliðrun
formerki	segir til um hvort tala er pósitíf eða negatíf. Táknin + og – eru notuð sem formerki.

formúla	stæða með tölum og táknum sem lýsir stærðfræðilegum tengslum
formúlulína (í töflureikni)	lína fyrir ofan sjálfan töflureikninn þar sem hægt er að breyta og skrifa formúlur
frádráttur	það að draga frá
frumtala	tala sem hefur aðeins tvo þætti, töluna 1 og töluna sjálfa
frumþátta	að skrifa tölu sem margfeldi frumtalna
G	
gagnabanki	kerfi þar sem hægt er að vista og flokka viðamiklar upplýsingar
gagnasvæði	hólf í töflureikni sem innihalda gögn. Það er skráð sem: hólfíð efst til vinstri: hólfíð neðst til hægri, t.d. B1:C45.
geisli	strik sem tengir saman miðju hring og punkt á hringferli; lengd slíks striks
gleiðhyrndur þríhyrn- ingur	eitt hornið í slíkum þríhyrningi er alltaf stærra en 90°
gleitt horn	horn sem er stærra en 90°
grannhorn	horn sem eru samtals 180° og hafa annan arminn sameiginlegan
gráður	horn eru mæld í gráðum. Við notum lítinn hring, $^\circ$, til að tákna gráður horns. Snúningur um heilan hring er 360° .
grunnflötur	botninn á þrívíðri mynd
gögn	safn talna eða annarra upplýsinga
H	
hálfína	er sá hluti línu sem liggur öðrum megin við tiltekinn endapunktur ásamt punktinum sjálfum
heiltöluhluti	sá hluti tugabrots sem er vinstra megin við kommu. Heila talan í blandinni tölu er einnig heiltöluhluti hennar, t.d. er 2 heiltöluhluti brotsins $2\frac{1}{2}$.
hellinga	að skipta í tvo jafn stóra hluta
hjálparteikning	skissa þar sem mál hafa verið skrifuð og sýnir hvernig teikna má rúmfræðilega mynd
hliðrun	að flytja alla punkta myndar jafn langt og í sömu átt
hlutfallstíðni	fjöldi athugana á sérstökum atburði deilt með heildarfjölda athugananna
hnit	segja til um hvar punktur er staðsettur í hnitakerfinu
hnitakerfi (rétthyrnt)	samanstendur af tveimur talnalínum sem eru hornréttar hvor á aðra og skerast í punktinum (0, 0)
horn	tvær hálfínur sem byrja í sama punkti mynda horn
horalína	strik milli tveggja horna í marghyrningi; hornin eru ekki hlið við hlið
hornasumma	summa allra horna í marghyrningi. Hornasumma þríhyrnings er alltaf 180° .
hólf í töflureikni	er hólf þar sem dálkur og röð mætast. Hólfíð þar sem dálkurinn B og röð nr. 2 mætast hefur tilvísunina B2.
hringbogi	hluti af hringferli
hringfari	tæki til að mæla horn, stundum kallað sirkill
hringgeiri	hluti úr hringfleti sem afmarkast af tveimur geislum út frá miðju hringsins og boga sem tengir saman enda geislanna. Hann getur táknað hlutfallstíðni sem hluta eða prósentu af flatarmáli hrings.
hringur	allir punktar sem eru í ákveðinni fjarlægð frá punkti sem kallast miðja hringsins. Hringurinn afmarkar hringflöt.
hvasshyrndur þríhyrn- ingur	öll horn hvasshyrnds þríhyrnings eru minni en 90°
hvasst horn	horn sem er minna en 90°
J	
jafna	samanstendur af tveimur algebrustæðum sem standa hvor sínum megin við jöfnúmerki. Jöfnúmerkið táknar að stæðurnar eru jafngildar. Það er venja að nota bókstafinn x til að tákna óþekktu stærðina í jöfnu ef aðeins er um eina óþekktu stærð að ræða.
jafnarma þríhyrningur	þríhyrningur þar sem tvær hliðanna eru jafn langar. Þá eru einnig tvö horn þríhyrningsins jafn stór.

jafngild brot	tvö eða fleiri brot sem hafa sama gildi, þ.e. eru jafn stór
jafnhliða þríhyrningur	þríhyrningur þar sem allar hliðarnar eru jafn langar og öll hornin jafn stór, þ.e. 60°
K	
kerfisbundin villa	ef allar mælingar gefa annaðhvort of lágar eða of háar niðurstöður
kúrfa	ferill
kvóti	svarið við deilingardæmi: deilistofn : deili = kvóti.
L	
lagshorn	tvö horn sem samtals eru 90°
langhlið	lengsta hliðin í rétthyrndum þríhyrningi
lengja brot	að margfalda teljara og nefnara með sömu tölu
liður	tölurnar sem lagðar eru saman í samlagningardæmi og tölurnar sem dregnar eru frá hver annarri í frádráttardæmi: liður + liður = summa; liður – liður = mismunur
lína	„farið“ eftir punkt sem hreyfir sig stöðugt í sömu stefnu á sléttu (eða fleti)
línurit	myndrit sem er notað til að sýna breytingu yfir ákveðið bil og er gert í hnitakerfi. Breytingin er sýnd sem samfelldur ferill.
lokuð spurning	spurning þar sem svarmöguleikarnir eru fyrir fram ákveðnir
M	
margfeldi	svarið sem kemur út þegar tala er margfölduð með annarri tölu: þáttur · þáttur = margfeldi
margföldun	það að margfalda
marghyrningur	lokuð flatarmynd með þremur eða fleiri hliðum. Hliðarnar eru strik sem mætast í hornum marghyrningsins. Marghyrningur hefur jafn mörg horn og hliðar.
meðaltal	niðurstaðan þegar deilt er í summu talna með fjölda þeirra
miðgildi	liggur í miðju gagnasafns ef gögnunum er raðað eftir stærð. Ef heildarfjöldi gilda er slétt tala er tekið meðaltal þeirra tveggja gilda sem eru næst miðju. Miðgildi er eitt þeirra gilda sem segir til um miðsækni.
miðpunktur	punktur á strikinu AB sem er jafn langt frá punktinum A og frá punktinum B
miðsækni	gildi sem sýna miðsækni segja til um hver „miðjan“ í stóru gagnasafni er, þ.e. gildi sem er dæmigert fyrir gagnasafn. Þessi gildi eru meðaltal, miðgildi og tíðasta gildi.
miðþverill	þverill sem liggur gegnum miðpunkt striks og myndar 90° horn við strikið
minni vasareiknis	virkar sem falinn gluggi í vasareikninum sem hægt er að skrá tölu í
minnsta sameiginlega margfeldi talna	minnsta talan sem allar tölurnar ganga upp í
mismunur	svarið í frádráttardæmi: liður – liður = mismunur
myndnúmer	tala sem táknar númer í röð mynda
myndrit	myndrit kynnir gögn á sjónrænan hátt
myndtala	tala sem segir til um úr hve mörgum einingum mynd er sett saman
N	
náttúrlegar tölur	tölurnar sem við teljum með: 1, 2, 3, 4 ...
nefnari	talann sem er undir brotastrikinu í almennu broti. Táknar í hve marga jafn stóra hluta heildinni er skipt.
neikvæðar tölur	þær eru vinstra megin við 0 á talnalínunni og eru táknðar með frádráttarmerki
O	
oddatala	heil tala sem er ekki deilanleg með 2
oddpunktur	punkturinn þar sem tveir armar horns mætast
opin spurning	spurning sem þátttakendur í spurningakönnun geta svarað frjálst
Ó	
óeiginlegt brot	almennt brot stærra en 1. Teljarinn er alltaf stærri en nefnarinn í óeiginlegu broti.
óuppsett jafna	texti sem lýsir vandamáli sem hægt er að leysa með jöfnu
P	
prósent	hluti af 100, hundraðshluti; 1% er einn hundraðasti hluti; 100% samsvarar einum heilum (allri heildinni, öllum)
punktur	„staður“ í rýminu sem hefur enga vídd

R	
rakningarformúla	formúlan sem gefur myndtöluna út frá fyrri myndtölu í mynstri
reikniaðgerð	segir til um hvernig reiknað er. Reikniaðgerðirnar fjórar eru samlagning, frádráttur, margföldun og deiling.
rétt horn	horn sem er 90°
rétthyrndur þríhyrningur	þríhyrningur þar sem eitt hornið er 90°
rétthyrningur	samsíðungur þar sem öll hornin eru 90°
rúmfræði	þekkingin á myndum og tengslum í sléttu og rými
rúmfræðiforrit	forrit fyrir tölvu sem gerir mögulegt að teikna rúmfræðilegar myndir sem má breyta, stækka eða minnka beint á skjánum
rúmfræðilegar myndir	myndir í tveimur eða þremur víddum, t.d. þríhyrningur eða píramídi
rúmfræðiteikning	línur og hringbogar teiknuð með hringfara og reglustiku
S	
sameiginlegur þáttur	sameiginlegur þáttur tveggja talna er tala sem gengur upp í báðum tölunum
samhverfa	mynstur sem kemur fram við speglun og snúning
samlagning	það að leggja saman
samnefnari	tala sem allir nefnararnir ganga upp í. Auðveldast er að nota minnsta sameiginlega margfeldið sem samnefnara.
samsettar tölur	tölur sem hægt er að skrifa sem margfeldi að minnsta kosti tveggja talna sem hvorki eru 1 né talan sjálf
samsíða	tvær línur eða strik sem skerast aldrei, hversu langt sem þau eru framlengd. Fjarlægðin milli tveggja samsíða lína er alls staðar eins.
samsíðungur	ferhyrningur þar sem tvær og tvær hliðar eru samsíða
skipta tölu upp eftir sætum	að skipta tölu í einingar, tugir, hundruð o.s.frv. og skrifa töluna sem summu þessara talna, t.d.: $234 = 200 + 30 + 4$
skífurit	yfirlit yfir hlutfallstíðni gagnasafns. Þetta myndrit er hringur sem skipt er í hringgeira. Stundum er þetta kallað kökurit.
skurðpunktur	þar sem tvær eða fleiri línur eða strik mætast
sléttar tölur	náttúrlegar tölur sem eru deilanlegar með 2; þetta eru tölur sem enda á 0, 2, 4, 6 eða 8
slumpreikningur	reikningur með námunduðum tölum
snúningshorn	hornið sem mynd er snúið um. Það kallast jákvætt horn ef snúningurinn er á móti klukkunni og neikvætt horn ef snúningurinn er með klukkunni.
snúningsmiðja	punktur sem er kyrr þegar mynd er snúið um þennan punkt sem miðpunkt
snúningssamhverfa	tvær myndir eru snúningssamhverfar ef snúningur annarrar myndarinnar leiðir til þess að hún þekur hina myndina alveg
snúningur	hreyfing þar sem allir fastir punktar í mynd verða áfram í sömu fjarlægð frá snúningsmiðju. Við slíkan flutning breytist hvorki form myndar né stærð.
spegilás	lína sem mynd er samhverf um. Fjarlægðin frá punkti A til spegilássins er jafn mikil og fjarlægðin frá hinum speglaða punkti A' til spegilássins.
spegilsamhverfa	það að hlutur eða mynd falli í sjálfa sig ef hún er spegluð um spegilás
spönn	sýnir eina tegund dreifingar í tölfraði og er mismunurinn milli hæsta og lægsta gildis í gagnasafni
strik	bútur af línu milli tveggja punkta
stuðlarit	súlurnar í stuðlariti eru breiðari en í súluriti og ekkert bil er á milli þeirra. Stuðlarit sýnir flokka í gagnasafni og er því notað þar sem gögn eru fengin úr samfelldu safni.
stytta brot	að deila með sömu tölu í teljara og nefnara
summa	svarið í samlagningardæmi: liður + liður = summa
súlurit	samanstendur af súlum sem eru allar jafn breiðar. Lengdir súlnanna sýna tíðni.
svarendur	þeir sem taka þátt í spurningakönnun

T	
tafla	samsett úr röðum og dálkum, notuð til að skipuleggja og flokka gögn og auðvelda yfirsýn
talnamynstur	mynstrið sem myndar talnarunu
talnaruna	tölur sem koma hver á eftir annarri í ákveðinni röð
teiknilýsing	lýsing á því hvernig teikning er gerð
teljari	talán, sem er fyrir ofan brotastrik almenns brots, táknar fjölda hluta af heild
teningur	teningur hefur sex jafn stóra hliðarfleti sem allir eru ferningar
tíðasta gildi	eitt þeirra gilda sem sýnir miðsækni í gögnum og lýsir því gildi í gögnunum sem hefur mestu tíðnina, þ.e. kemur oftast fyrir
tíðni	segir til um hve margir eru af hverjum atburði eða í hverjum flokki sem rannsakaðir eru
tíðnitafla	tafla sem gefur yfirlit yfir hve oft sérhvert gildi, sem athugað hefur verið, kemur fyrir
tígull	samsíðungur þar sem allar hliðarnar eru jafn langar
topphorn	horn sem hafa sameiginlegan oddpunkt og sameiginlega arma. Topphorn eru alltaf jafn stór.
trapisa	ferhyrningur þar sem tvær mótlægar hliðar eru samsíða
tröppurit	sérstakt afbrigði af línuriti sem sýnir ekki samhangandi feril heldur nokkrar láréttar línur sem líta út eins og tröppur
tugabrot	samanstendur af heiltöluhluta tölunnar, sem er vinstra megin við kommu, og einum eða fleiri aukastöfum hægra megin við kommuna. Tugabrot milli -1 og 1 hafa heiltöluhlutann 0 .
tugveldi	veldi þar sem veldisstofninn er 10 . Tölurnar 10 , 100 og 1000 eru dæmi um tugveldi.
tölfræði	felur m.a. í sér að skipuleggja kannanir
tölustafur	við notum tíu tölustafi til að skrifa tölur: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9
U	
ummál	lengd jaðars marghyrnings eða hrings
upphafspunktur	skurðpunkturinn milli ásanna í hnitakerfi. Upphafspunkturinn hefur hnitin $(0, 0)$.
V	
veldi	stuttur ritháttur fyrir margföldunardæmi þar sem þættirnir eru sama talán. Veldi samanstendur af veldisstofni og veldisvísi.
veldisstofn	talán sem margfölduð er með sjálfri sér í veldi
veldisvísir	í veldi segir veldisvísirinn til um hve oft á að margfalda veldisstofninn með sjálfum sér
verg landframleiðsla (VLF)	verðmæti allra vara og allrar þjónustu sem framleidd er í landinu á ári
vídd	í rúmfræði eru myndir með einni, tveimur og þremur víddum. Lína er í einni vídd, flötur eða slétta er í tveimur víddum og kubbur er í þremur víddum (eða lína er einvíð, slétta er tvívíð og kubbur er þrívíður).
X	
x-ásinn	lárétta talnalínan í rétthyrndu hnitakerfi
Y	
y-ásinn	lóðrétta talnalínan í rétthyrndu hnitakerfi
yfirborðsflatarmál	summa flatarmála allra hliða þrívíðrar myndar eða hlutar
Þ	
þverill	lína eða strik sem myndar 90° horn við línuna sem þverillinn er á
þversumma	summa allra tölustafa í tölu. Þversumma tölunnar 315 er 9 .

Skali 1B

Nemendabók

ISBN 978-9979-0-1942-8

© Gyldendal Norsk Forlag AS 2013

Heiti á frummálinu: Maximum 8 Grunnbok (4. og 5. kafli)

Kápuhönnun: 07 Gruppen AS/Kristine Steen

Mynd á kápu: Brynjar Gauti/Mbl.

Teikningar: Børre Holth

Ritstjóri norsku útgáfunnar: Åse Bergundhaugen

Leturgerð í meginmáli: Neo Sans Std, Regular, 10,5 pt.

© 2014 Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Bjørnar Alseth

© 2014 íslensk þýðing og staðfærsla: Hanna Kristín Stefánsdóttir

© 2014 ljósmyndir:

Myndir © frá Shutterstock.com

Bls. 11 Eric Isselee; bls. 12 Ververidis Vasilis; bls. 13 Tracy Whiteside; bls. 15 Africa Studio; bls. 20 LoloStock; bls. 22 S.Borisov; bls. 23 Genemacom; bls. 26 Phatthanit; bls. 27 Shutterstock; bls. 28 Dragance 137; bls. 31 Anna-Mari West; bls. 32 Syda Productions; bls. 33 Naypong; bls. 35 Kiselev Andrey Valerevich; bls. 36 Jiang Hongyan; bls. 38 Don Land; bls. 41a.o. Andresr, a.n. timurockart; bls. 42 Halfpont; bls. 44 Ilin Sergey; bls. 46 Andrey Kuzmin; bls. 51 aceshot1; bls. 59 MC_PP; bls. 64–65 Mindscape studio; bls. 71 Shutterstock; bls. 77 anistidesign; bls. 78 Sabphoto; bls. 79 Ekarin Apirakthanakorn; bls. 80 Monkey Buisiness Images; bls. 81a.o. Nattika og a.n. Pakhnyushcha; bls. 82a.o. D7INAMI og a.n. Deva Studio; bls. 83 Radu Bercan; bls. 85 juniart; bls. 87 Picsfive; bls. 89 Pixelbliss; bls. 93 Waj; bls. 94 Adi G; bls. 98 Oliver Sved; bls. 100 Cisco Freeze; bls. 101 Tatiana Dorokhova; bls. 102 Shutterstock; bls. 103 Antoniya G. Kozuharova; bls. 107 Izf; bls. 108 studio online; bls. 114 Shutterstock; bls. 115 Syda Productions; bls. 117 Oliver Sved; bls. 121 Zaretska Olga; bls. 122 Igor A. Bondarenko; bls. 124 David Davis; bls. 127 Africa Studio; 128 Snw

Myndir © frá iStock.com:

Bls. 45 maodesign; bls. 62 characterdesign

Myndir © frá Dreamstime.com:

Bls. 105 Mirela Schenk; bls. 111 Willeecole

Myndir © frá mbl.is:

Bls. 9 Skapti Hallgrímsson; bls. 60 Árni Sæberg; bls. 61 Kristinn Ingvarsson; bls. 63 Árni Sæberg;

Aðrir:

Bls. 6–7, Myndasafn KSÍ

Bls. 70, Wikimedia Commons CC BY SA:

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2014

Námsgagnastofnun

Kópavogi

Umbrot: Námsgagnastofnun

Prentvinnsla: Ísafoldarprentsmiðja ehf. – Umhverfissvottuð prentsmiðja

Eftirtaldir lásu yfir handrit að hluta eða í heild og veittu góð ráð við gerð bókarinnar: Kristín Bjarnadóttir, Ingólfur Steinsson og Þórdís Guðjónsdóttir. Þeim og öðrum sem komu að verkinu og veittu góð ráð eru færðar bestu þakkir.

SKALI 1B

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Skali býður upp á innihaldsríka og lifandi stærðfræðikennslu.

Nemendur öðlast bæði skilning og færni með því að vera virkir og leitandi þegar þeir vinna við stærðfræði. Nemendur og kennarar nota *Skala* til að lesa stærðfræði, vinna verkefni, rökræða lausnleiðir og fást við stærðfræðilegar áskoranir á rannsakandi og skapandi hátt. *Skali* vekur áhuga nemenda með því að tengja stærðfræði við daglegt líf og bjóða upp á fjölbreytilega kennslu.

Í *Skala* er lögð áhersla á

- hið faglega innihald, rökrétta uppbyggingu námsefnisins og framvindu námsins
- skýr og nákvæm markmið
- hagnýt dæmi og verkefni
- aðlögun námsefnisins að þörfum allra nemenda í sameiginlegu námssamfélagi þeirra
- nákvæmar leiðbeiningar og stuðning við kennara áður en kennsla hefst, meðan á henni stendur og eftir að henni lýkur

Skali 1 samanstendur af tveimur nemendabókum, tveimur æfingaheftum og tveimur kennarabókum. Kennarabækurnar eru gefnar út á heimasíðu Námsgagnastofnunar og þar er auk þess að finna verkefnahefti, lausnir og annað fylgiefni með floknum.

Höfundar:

Björn Alseth

Grete Normann Tofteberg

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Janneke Tangen